Math. P.
554 ^x^

Swinden
(J. H. van)

<36635028520010 S

<36635028520010

Bayer. Staatsbibliothek

Anfangsgründe

der

Meſskunde

von

J. H. van Swinden,
Profeſſor der Weltweisheit, Mathematik, Naturkunde und Aſtronomie zu Amſterdam, Mitglied von verſchiedenen gelehrten Geſellſchaften.

Aus dem Holländiſchen ins Deutſche

überſetzt

von

C. Ulrich Gaab,
der Theologie Candidat und Liebhaber der Mathematik.

Iena,
in der Akademiſchen Buchhandlung,
1797.

82 = 99.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.
Bayerische
Staatsbibliothek
München

Vorrede des Uebersetzers.

Schüchtern lege ich dem Publikum meine Uebersetzung der von Herrn *Van Swinden* geschriebenen Meſskunde vor. Ich unternahm ſie unter ſehr ungünſtigen Umſtänden. Während meines Aufenthaltes in Holland lernte ich das von jenem berühmten Verfaſſer ausgearbeitete Lehrbuch kennen, und, von dem Wunſche belebt, meinem Vaterlande ein Werk bekannter zu machen, das ſo viele Vorzüge in ſich vereinigt, begann ich eine Uebersetzung deſſelben in einer äuſserſt geſchäftvollen Lage, und zu einer Zeit, da ich mehr in der fremden als in meiner teutſchen Mutterſprache zu denken gewohnt war. Da bald darauf meine Lage ſich änderte, und ich eine lange Reiſe zu machen hatte, konnte ich nur hie und da,

 wo

wo ich längere Zeit verweilen mufste, ein Stück der Ueberfetzung niederfchreiben. Mit Vergnügen würde ich die angefangne Arbeit aufgegeben haben, wenn ein Anderer unfrer Landsleute es unternommen hätte, diefes Van Swinden'fche Werk auf unferen teutfchen Boden zu verpflanzen. Allein, da wir in fo langer Zeit nach der Erfcheinung des Originals noch immer keine Ueberfetzung hatten, und kaum noch eine zu erwarten war, fo entfchlofs ich mich, die meinige zu vollenden, um fo mehr, da meine gegenwärtige Lage mir zur Fortfetzung der Arbeit etwas mehr Freiheit verftattete. Möge die Aufzählung diefer Hinderniffe mir bei nachfichtigen Lefern wegen mancher Unvollkommenheiten der Ueberfetzung — befonders wegen der etwa in den erften Bogen bemerkbaren, allzu grofsen Anhänglichkeit an den holländifchen Ausdruck — zur Entfchuldigung dienen!

Der Ruf, worinn der Verfaffer des Originals als Mathematiker fteht, und die Vorzüge feines Werkes, die fchon in der Ankündigung diefer Ueberfetzung in dem Int. B. der A. L. Z. ausführlich aufgezählt worden find, werden hinreichend fein, das Unternehmen felbft zu rechtfertigen, und der Gebrauch des Werkes wird deffen Werth beftätigen.

Das, wodurch fich diefes Lehrbuch der Mefskunde vor fo vielen andern feiner Art zu feinem Vortheil

theil auszeichnet, iſt beſonders die ungemeine Deutlichkeit des Vortrags und die ausgezeichnete Einfachheit in den geometriſchen Beweiſen, welche hier durchaus herrſcht, und das Studium dieſer Wiſſenſchaft ſehr erleichtert. Es iſt unter uns ziemlich allgemein anerkannt, daſs die franzöſiſchen und beſonders die holländiſchen Mathematiker, in Rückſicht auf die genannten Vorzüge des Vortrags ihrer Wiſſenſchaft, im Durchſchnitt, es den Engländern und ſelbſt den Teutſchen (verdienſtvolle Männer, wie *Wolf, Käſtner, Karſten, Pfleiderer, Pfaff, Bode, Klügel*, u. a. machen freilich eine Ausnahme von dem Satze!) zuvorthun. Unter jenen zeichnet ſich aber Hr. *Van Swinden*, eben ſo wie ſein Vorfahrer auf der Schule zu Amſterdam, Hr. *Pibo Steenſtra*, noch beſonders aus. Sein Vortrag iſt ſo einfach und natürlich, daſs er die, die bey dem Studium der Geometrie abſchreckende Hinderniſſe zu finden fürchten, auf das angenehmſte überraſchen wird. Aber es iſt nicht dieſe Deutlichkeit allein, die dieſem Lehrbuch den gerühmten Werth giebt; es gehört dazu auch die Vollſtändigkeit, die in demſelben angetroffen wird. Nicht nur der Anfänger in der Geometrie wird alle ihm nöthige Sätze dieſer Wiſſenſchaft in dem Van Swinden'ſchen Werke antreffen, ſondern auch die, die mit dieſer Wiſſenſchaft ſchon vertrauter ſind, werden hier eine Vollſtändigkeit der bisher gefundnen geometriſchen Lehrſätze entdecken, welche ſie von

den ausgebreiteten mathematischen Kenntnissen des Verfassers der *Positionum physicarum* aufs neue überzeugen wird. Sie werden bald bemerken können, dafs Alles, was je von Geometern Brauchbares erwiesen worden ist, in diesem Werke sich vorfindet. Dabei hat der Verfasser seinem Buche eine so geschickte Einrichtung zu geben gewufst, dafs es, jener Vollständigkeit unerachtet, doch zugleich ein sehr brauchbares Lehrbuch für akademische Vorlesung ist. Er hat nämlich die für den ersten Unterricht nothwendigsten Sätze mit gröfserer Schrift drucken lassen, um sie von dem, was nur für Geübtere gehört, zu unterscheiden. Eine Methode, die sich um so mehr empfielt, da sie allerdings dazu beitragen kann, dem Studium der Mefskunde zur Erreichung eines seiner ersten Zwecke — Anhängern zum Selbsterfinden geometrischer Wahrheiten Veranlassung zu geben — wieder zu verhelfen.

Die Hoffnung, durch diese Ueberfetzung etwas zur gröfseren Ausbreitung des mathematischen Studiums in unserm Vaterlande beizutragen, war nicht der letzte Grund, der mich zur Vollendung dieser Arbeit aufmunterte. Wie sehr es zu wünschen wäre, dafs das Studium dieser Wissenschaft mehr Anhänger unter uns finden möchte, darüber sind gewifs nicht blofs Mathematiker, sondern alle die mit mir einig, die mit der Art des Studirens, die unter unsern jungen Mitbürgern besonders auf Akademien im Gange ist,

iſt, bekannt ſind. Man hat ſo oft von den auszeichnenden Vortheilen geſprochen, die ein gründliches Studium der Mathematik, ſelbſt für die Ausbildung des Kopfes zu andern Wiſſenſchaften, gewährt; man hat es ſo oft wiederholt, daſs das Studium derſelben vorzüglich zur Stärkung der Urtheilskraft ſehr geſchickt, und daher dem Gelehrten wenigſtens eben ſo nöthig, als die Logik, ſey. Und wird dann nicht allgemein dieſe Behauptung als gültig zugeſtanden? Iſt es alſo nicht zu beklagen, daſs demungeachtet das ſo unentbehrliche Studium dieſer Wiſſenſchaft ſo ſehr vernachläſsiget wird, daſs unſre Jünglinge — hingeriſſen vom Geiſt der Zeit — lieber in den ſpizfindigſten philoſophiſchen Speculationen ſich ſelbſt verlieren, als bei einem Studium verweilen wollen, das ihrer Phantaſie weniger ein regelloſes Umherſchwärmen in transſcendenten Regionen verſtatten, ſie an regelmäſsiges Denken gewöhnen und ſonach ihrem Geiſt erſt die erforderliche Feſtigkeit geben würde, durch welche ſie ſelbſt in den höheren Regionen der philoſophiſchen Speculation glücklichere und ſichrere Schritte zu thun im Stande ſein würden.

Möchte ich doch die Hoffnung, durch dieſe Schrift etwas zur Beförderung dieſes unentbehrlichen Studiums beizutragen, erfüllt ſehen! Wie

 ſüſs

ſüſs würde mir eine ſolche Belohnung meiner Arbeit ſein!

Morſee im Watt-Lande
den 27. Febr. 1796.

Der Ueberſetzer.

Vor-

Vorrede
des Verfassers.

Da ich, vor fünf Jahren, auf die erhabene Schule dieser Stadt berufen wurde, um, unter anderen Zweigen der philosophischen Wissenschaften, auch die Mathematik zu lehren, so sah ich ein, dass es nützlich sein würde, einen kurzen Inbegriff der Messkunde abzufassen, wovon ich in meinen Lectionen Gebrauch machen könnte. Ich gab dieselbe im Jahr 1786. im Lateinischen zum Druck, und da ich vor einem Jahre angefangen habe, meine Lectionen über die Messkunde, in Hoffnung, einer grössern Anzahl junger Leute nützlich zu sein, im Niederteutschen zu halten, musste ich auch den gemeldten kurzen Inbegriff in unserer Muttersprache herausgeben. Nun sahe ich wohl bald, dass ich mit einer blossen Ueber-

setzung, mir selbst wenigstens, durchaus keine Genüge leisten würde: sondern daſs ich, bei dieser Gelegenheit, das ganze Werk merklich verbessern, und in allen Rücksichten vollenden müſste, um so mehr, da wir in unsrer Sprache mit Büchern dieser Art übel versehen sind. Hierzu habe ich weder Zeit, noch Arbeit gespart. Ob es mir gelungen seyn möge, ein besseres und vollständigeres Ganze zu verfertigen, als wir bis jetzt gehabt haben, steht nicht mir zu, zu beurtheilen.

Ich werde nicht über die Art, wie man die Meſskunde mit Vortheile lehren könne, sprechen: noch über das Lob, das den Alten gebührt, insbesondere über das des *Euklides*; über die groſse Frage, ob man, wie Einige wollen, *seinen* Anfangsgründen, seiner Methode, seiner Ordnung immer folgen müſse, und ob es unmöglich sey, eine andere Ordnung, als die seinige, zu befolgen, und dennoch gute Anfangsgründe der Meſskunde zu liefern; über die wahre Art mathematischer und zwar *synthetischer* Beweiſse, nach der Weise der Alten; und ob es nicht möglich sey, diesen pünktlich zu folgen, und dennoch einiger Zeichen, die sie nicht gebrauchten, sich zu bedienen, mich erklären. Wollte ich das thun, dann würde diese Vorrede ein ganzes Buch ausmachen; doch ich muſs etwas über den Zweck sagen, den ich in diesem Werke vor Augen gehabt habe.

Ich habe mich vor allen Dingen bemüht, in nichts von der ſtrengſten Beweiſsart der Alten, wovon *Euklides* und *Archimedes* uns ſolche vortreffliche Muſter nachgelaſſen haben, abzugehen, und keine Mühe geſpart, um ſehr genaue Begriffe der Sachen anzugeben, etwas, das heutiges Tages ſehr deutlich in den meiſten Büchern, welche den Titel von Anfangsgründen der Meſskunde führen, vernachläſsiget wird. Den Geiſt zu bilden, ihn an dieſe Genauigkeit der Begriffe, an dieſe ſtrenge Schluſs-art, an dieſe vollkommen an einander angereihte Beweiſse zu gewöhnen, dies iſt einer der Hauptgegenſtände, welchen man in dem Unterricht der Meſskunde vor Augen haben muſs: einer der vornehmſten Gründe, welche die jungen Leute antreiben müſsen, dieſelbe zu lernen. „Es giebt, ſagt *) Quintilian „mit Recht, in der Meſskunde einen Theil, der für „die Jugend nützlich iſt; denn der Verſtand wird da„durch geübt, der Geiſt geſchärft, es entſpringt die „Schnellheit im Faſſen daraus, ja die Meſskunde iſt „ſelbſt nützlich, nicht wie andere Künſte, wenn „man ſie verſteht, ſondern auch ſelbſt, wenn man „ſie lernt.“ Und es iſt gerade der Theil, der wichtige Theil, den man vernachläſsiget, wenn man etwas von der ſtrengen Schluſs- und Beweisart der Alten wegläſst, unter dem Vorwande, die Sachen faſslicher vorzutragen, oder angenehmer zu machen.

Um

*) Inſtit. Orat. Libr. I. Cap. 10. §. 8.

Um die Uebung des Verstandes, die Schärfung des Geistes zu befördern, und diesem die Beugsamkeit zu verschaffen, wodurch er sich, so wohl zum Fassen der Wahrheiten, als zum Auflösen der Probleme, geschickt macht, habe ich an bei weitem den meisten Stellen allein die Gründe, worauf die Beweise der Sätze ruhen, angezeigt und die Aufgaben von den Sätzen, oder Lehrsätzen (Theoremata) abgesondert. Meine Absicht bey dem ersten ist, dass ich junge Leute ansporne, die Beweise selbst zu führen, was ihnen um so weniger beschwerlich fallen wird, da ich alle Sätze, die sie dazu nöthig haben, in derjenigen Ordnung, worin sie in dem Beweise vorkommen müssen, angeführt habe. Ich habe diese Allegationen mehr oder wenig weitläufig gemacht, je nachdem solches mir nöthig vorkam, besonders für die Sätze, die ich in meinen Lektionen zu erklären und zu beweisen nicht gewohnt bin, und die darum mit kleinen Lettern gedruckt sind. Vielmals habe ich alsdann den Beweiss ganz besonders auf den schwersten Stellen beygefügt. Ich denke, dass die jungen Leute, und andere Liebhaber der Messkunde hiedurch ein weites Feld zur Beschauung und Arbeit bekommen werden. Die Citationen aus *Euklides* und einigen andern Schriftstellern werden den Leser in den Stand setzen, dieselbe um Rath zu fragen, ihre Art von Beweisen mit der meinigen zu vergleichen, und dadurch die Sachen besser verstehen zu lernen. Wenn man in einem Buche immer den Be-

Beweiſs bey dem Satze antrift; ſo arbeitet der Geiſt nicht; um den Beweis zu finden; ſondern bleibt in dieſer Rückſicht ganz unthätig. Wenn ein ſolches Buch beym Unterrichte gebraucht wird; kann der Lehrer beinahe nichts thun, als daſs er mündlich den nemlichen Beweis wiederhohle. Ich habe daher auch aus dieſem Grunde für beſſer gehalten, da doch mein Buch beſtimmt iſt, von mir in meinen Vorleſungen erklärt zu werden, die Beweiſe wegzulaſſen, ſie in Gegenwart meiner Zuhörer aus den angezeigten Gründen zu führen und über ihre Art und Ausführung verſchiedene Anmerkungen beizuſetzen; ein Verfahren, wobei ich mich ſehr wohl befunden habe.

Ich wiederhohle es: man kann die Anfänger nicht genug anſpornen, um ſelbſt zu arbeiten, ſelbſt etwas zu entwerfen: aus Mangel an dieſer Fürſorge für Sie werden nicht ſelten die beſten Köpfe erſtickt, oder zum wenigſten träger, als ſie anders würden geweſen ſeyn. Darum habe ich die Aufgaben von den Lehrſätzen, das heiſst, den ausführenden *) von dem beſchauenden Theile abgeſondert, und am Ende jeden Satzes angezeigt, welche Aufgabe man alsdann im Stande iſt aufzulöſen. Ich laſſe alſo dieſe Probleme von den jungen Leutchen ſelbſt auflöſen und

*) Den pracktiſchen vom theoretiſchen Theile.

und beweisſen, und beſtimme einen Tag in der Woche, um ihre Auflöſungen nachzuſehen. Ich habe mich ausnehmend wohl bey dieſem Verfahren befunden, und mich mehr als einmal über die Geſchwindigkeit, die Anfänger in kurzer Zeit hierin erlangen, verwundert. Endlich habe ich aus eben dieſem Grunde mehr als einmal in Folgerungen, oder Anmerkungen wahrnehmen laſſen, wie man eine und dieſelbe Sache aus verſchiedenen Anfangsgründen beweiſſen könne. Alle Beweiſse, wenn ſie richtig ſind, ſind zwar für den Mathematiker, aber nicht für die Philoſophen von gleichem Werthe. Dieſer hält diejenige, welche mehr direkt aus der wahren Art der Gegenſtände abgeleitet ſind, für die beſte. Das Theorem von *Pythagoras*, zum Beyſpiel, über das rechtwinkliche Dreieck, kann auf die Art *Euklids*, ſo wie wir es bey dem 7ten Satze von dem 2ten Buche gethan haben, bewieſen, oder auch viel kürzer und leichter aus der Lehre der ähnlichen Dreiecke (4tes Buch. 12ter S. Anm. 3.) abgeleitet werden. Doch was das erſte betrift, ſo kommt mir, es philoſophiſch geſprochen, das beſte zu ſeyn vor. Ich laſſe niemals eine Gelegenheit vorbey gehen, meine Zuhörer auf dergleichen Merkwürdigkeiten aufmerkſam zu machen.

Ich habe, zweytens mich bemüht, in dieſem Werke eine gute Ordnung einzuführen und die verſchiedene Arten von Gegenſtänden, ſo viel möglich, abgeſondert, zu betrachten. Es hat dieſes, ohne eini-

einige Lücken zu machen, nicht wenig Mühe gekostet. Es kam mir das beste und bequemste zu seyn vor, die gerade Linien abgesondert, ohne ihre Eigenschaften aus denen der Dreiecke ableiten zu müssen, zu betrachten, und dann erst zu den Dreiecken überzugehen, die geradliniche Figuren abzuhandeln, ehe ich von dem Cirkel spräche, u. s. w. Man steigt auf diese Art in der That stufenweise und in einer regelmäßsigen Ordnung hinauf. Das dritte Buch, das über die Gleichheit der Verhältnisse handelt, gehört nicht zur Meſskunde, als solche betrachtet; sondern mehr zu der Rechenkunst, oder zu der *Algebra* oder Buchstabenrechnung. Es macht daher einen Ausruheplatz aus, wie dies bey *Euklid*, was sein fünftes Buch betrift, statt findet. Vielleicht wäre es besser gewesen, dasselbe als eine Einleitung voran zu setzen. Wer dieser Meinung ist, kann es thun: ich habe aber aus Erfahrung gelernt, daſs der Begriff von *Verhältniſs* und *Gleichheit der Verhältnisse*, so einfach er in der That auch sey, dennoch für die Anfänger immer mit Schwierigkeiten verknüpft zu sein scheint, und ich habe daher für besser gehalten, durch die zwey ersten Bücher ihren Verstand allmählig an das Anschauen abgezogener Begriffe zu gewöhnen. Die Schwierigkeit, welche sie in der Betrachtung einer Verhältniſs und Verhältniſs-Gleichheit finden, ist gewiſs groſsentheils dem zuzuschreiben, daſs man in den Rechenschülern diesen Begriff beinahe gar nicht, oder wenigstens

sehr

sehr mangelhaft entwickelt, wiewohl beinahe alles in der Rechenkunst darauf beruhet.

Ich hätte nach dem 2ten Buche unmittelbar das 5te folgen lassen können, und dann den 12ten und 13ten Satz allein nach der Art Euklids beweissen dürfen, und dies hatte ich auch bey dem ersten Entwurfe dieses Werks gethan: ich habe es aber nachher verändert, weil man dann ausser Stande ist, von den Verhältnissen, in welchen die verschiedene Linien, die, in und an den Cirkel gezogen, einander schneiden, nemlich von dem 1sten und 2ten Folgesatze des 11ten und von dem 1sten, 3ten, 5ten, 6ten und 7ten Folgesatze des 13ten Theorems Meldung zu thun, wovon man auch kein Wort bey Euklid findet. Ich habe daher für besser gefunden, den Cirkel ganz im 5ten Buche nach der Lehre der ähnlichen Dreiecke und geradlinichen Figuren, die in dem 4ten Buche enthalten ist, abzuhandeln: doch nichts hindert, dass Jemand unmittelbar, nachdem er das 2te Buch geendiget hat, die Stücke des 5ten, die nicht von dem 4ten abhängen, wenn er es wünscht, studiren könne.

Endlich habe ich vorzüglich ein viel vollständigeres Ganze, als bis auf diesen Tag geschehen ist, zu liefern, zum Zwecke gehabt. Die grösten Vertheidiger *Euklids* können nicht in Abrede ziehen, dass man nicht alles, was man jetzt durchaus nöthig

hat

hat, um sich entweder zum Praktischen der Meſskunde tüchtig zu machen, oder zur Physik und Astronomie übergehen zu können, in *Euklid* findet. Man findet nichts über das Finden des Inhalts der Figuren; nichts, oder beynahe nichts, über die Theorie der Vielecke, nichts über die Verhältnisse des Cirkel-Umkreiſses zu dem Diameter; nichts über die Dreiecksmessung; nichts über die schönen Entdeckungen des *Archimedes* (welcher erst 70 Jahre nach *Euklid* lebte) in Rücksicht auf den Cirkel, die Kugel, und den Kegel u. s. w., so daſs man, nachdem man *Euklid* abgehandelt hat, noch dieses alles aus andern Büchern entlehnen muſs. Sie können nicht bergen, daſs man von den dreizehen oder fünfzehen Büchern *Euklids* jetzt allein die sechs ersten, das 11te und 12te gebraucht: das 7te, 8te, 9te, 10te überschlägt, weil man diese Materien nun anders behandelt, das 13te, 14te und 15te ebenfalls nicht benutzt, theils weil man sie für weniger nützlich hält, theils weil man sie auf diejenige Art, auf welche *Euklid* sie behandelt hat, nicht ohne das 10te Buch, das sehr schwer ist, um vollkommen verstanden zu werden, verstehen kann. Diese Bücher sind inzwischen in ihrer Art besonders nicht weniger schön, als die acht, welche man gebraucht: das 10te kömmt mir vor ein Meisterstück zu seyn. Giebt man nun zu, daſs es einige Theile, die man besser, als *Euklid* gethan hat, behandeln kann oder lieber darf; warum auch dann nicht seinem ganzen Systeme alle Verbesserung und Ver-

 meh-

mehrung, die man für nützlich hält, gegeben? Ich habe mir daher nicht gefürchtet, dies zu thun, und man wird sehen, daſs, auch aus dieſem Geſichtspunkte betrachtet, mein Werk vollſtändiger iſt, als die meiſten, wo nicht alle in unſern Tagen herausgekommene Anfangsgründe der Meſskunde, die mir bekannt ſind; da ich in daſſelbe nicht allein einige Sätze aus dem 7ten, 8ten, 9ten, und 10ten Buche, ſondern auch das ganze 13te, 14te, und 15te Buch von *Euklid* eingeſchaltet, und ſo kurz und deutlich, als mir möglich war, bewieſen habe.

Ueber dies giebt es viele nützliche Sätze, die man nicht bei *Euklid*, ſondern wohl in andern Elementar-Werken findet: es giebt andere, die man in keinem der eben gemeldten, ſondern anderwärts herumgeſtreut antrift, und wovon der Nutzen beſonders in der Naturkunde ſehr beträchtlich iſt. Ich war der Meinung, ſie alle in mein Werk aufzunehmen. Und gewiſs, wenn ich nicht befürchtet, ich möchte mein Werk viel zu weitläuftig machen, und gezweifelt hätte, daſs es wohl dem Geſchmack unſerer Zeit hinlänglich angemeſſen ſeye, ſo würde ich es noch viel vollſtändiger haben machen können. Wie oft habe ich, wenn ich die Abhandlungen verſchiedener Akademien, die Werke von *Pappus*, *Vieta*, *Snellius* und *Anderen*, beſonders die *Geometria ſublimior* von *Kraft* bey dieſer Gelegenheit nachgeſehen habe, nicht mit Leidweſen viele ſchöne Stücke, um nicht zu ausführlich zu ſein, zurückgelaſſen? und wie oft habe ich nicht gewünſcht, daſs einmal Jemand

die

die Mühe auf sich nehmen möchte, alle mathematischen Sätze, die in Hunderten von Büchern weit und breit zerstreut liegen, in Ein Ganzes zu sammeln? Alsdann würden wir erst unsern Reichthum in der Meßkunde kennen lernen: und da man dabey, daß man alle Sätze in ein ordentliches Ganze brächte, und den einen aus dem andern bewiese, wohl hier und da eine Lücke bemerken würde, so möchte dieselbe, so wie auch die Betrachtungen des Vorraths selbst, zum Entdecken vieler neuen Eigenschaften Veranlassung geben. Ich werde hier alle die besondern Sätze, die ich in das 1te und 2te Buch eingeschoben habe, nicht aufzählen; doch allein anzeigen, daß ich glaube, die Lehre der Proportionen vollständiger, als gewöhnlich geschicht, behandelt zu haben: daß ich mich nicht erinnere, daß man in unserer Sprache etwas Erhebliches über die *harmonische Proportion* antreffe und daß diese Materie, so nützlich sie auch in der Naturkunde ist, beynahe nicht mehr berührt wird: daß ich, so wohl in dem 4ten Buche (12ten Satzes 4te und 5te Coroll.) als auch in dem 5ten B. (13ten Satzes 5, 6 und 7te Coroll.) das Nöthige zum Verstehen und Beurtheilen des Problems: „zwo mittlere Proportional-Linien zu finden:" daß ich in dem 6ten Buche die ganze Lehre der darein und darum beschriebenen Polygone viel vollständiger, als bis jetzt geschehen ist, behandelt habe: daß ich in der 1sten Abtheilung in dem 17ten Lehrsatze u. s. w. den schönen Abschnitt, den Herr *Hennert* in

den Abhandlungen der Haarlemschen Gesellschaft über diesen Gegenstand bekannt gemacht hat, auf sehr einfache Beweisse gebracht habe, welche ich den Leser mit den algebraischen Beweisen dieses Professors zu vergleichen bitte: daſs ich die schönen Entdeckungen von *Huygens*, *Snellius*, *Ludolph von Ceulen*, *Du Hay*, *Saurin*, die beinahe in Vergessenheit gekommen sind, und sich in Büchern, die man kaum mehr lieſst, befinden, wegen ihres Nutzens und ihrer Schönheit geliefert habe: und daſs die 2te Abtheilung beinahe ganz neu ist.

Ich habe in dem 7ten Buche mit der Lehre von den *Gränzen*, etwas, worüber wir in unserer Sprache nichts besitzen, den Anfang gemacht: diese Lehre ist das einzige Mittel, um die Lehrsätze, welche das Verhältniſs des Umkreisses eines Cirkels zu seinem Diameter, den Inhalt des Cirkels, der Pyramiden, Cylinder, Kegeln, Kugeln, bestimmen, mit Genauigkeit zu beweisen. Auch haben sowohl *Archimed*, als *Euklid* diese Lehre mehr oder weniger verdeckt eingewebt. Sie ist überdieſs der einzige Grund, worauf die Berechnungen der höheren Mathesis beruhen, wenn man diese auf gehörige Weise erklären, und nicht zu dem unbestimmten und ganz *unmathematischen* Begriff von *unendlich groſs* und *unendlich klein* seine Zuflucht nehmen will.

Ich

Ich habe ferner in dem 7ten Buche die Entdeckungen von *Archimed* nicht allein, sondern auch von Snellius und Huygens, die man nirgends, als in ausser Gebrauch gekommenen Schriften von diesen Verfassern antrifft, vorgetragen und bewiesen.

Das 8te Buch enthält verschiedene Theile, die man gemeiniglich in andern Büchern dieser Art nicht antrifft: ich habe in der 2ten vorzüglich in der 3ten Abtheilung meist alles aus dem vortreflichen Werke des Herrn *Cagnoli* entlehnt, über den Gegenstand der 3ten Abtheilung wurde niemals etwas in unserer Sprache geschrieben.

Das 9te Buch oder die Trigonometrie ist viel vollständiger, als man sie je, biss auf den Herrn *Cagnoli*, dem ich meistens gefolgt bin, behandelt hat.

In dem 11ten Buche wird die Lehre von den regulairen Körpern, so wie auch in dem 12ten Buche die Lehre von der Einschreibung der nemlichen Körper in die Kugel in vielen Rücksichten auf eine eine ganz neue Art behandelt: wodurch ich zugleich in Stand gesetzt wurde, das ganze 13te, 14te und 15te Buch von *Euklid* zu erklären, ohne das 10te Buch dieses Verfassers, das ungemein schwer ist, zu gebrauchen. Diese Theile alle auf solche Art gesammelt, werden in keinem der mir bekannten Werke bei einander gefunden.

Der Leser urtheile nun aus dem Gesagten und noch mehr aus dem Werke selbst, ob und in wie

ferne dieses Werk vollständig genug oder vollständiger, als andere, genannt werden kann? Es dünkt mich, es tauge sowohl für solche, die mehr, als die weniger in dieser Wissenschaft fortgerückt seyn. Alles, was mit grossen Buchstaben gedruckt ist, macht für sich selbst ein ganzes System von den nöthigsten Lehrsätzen aus. Man kann Anfangs das Uebrige, das mit kleinen Buchstaben gedruckt und für solche, die weiter gekommen sind, gehört, überschlagen.

Ich wünsche, dass ich mit diesem Werke so wohl den Schülern, die mich in der Messkunde zu ihrem Führer wählen, als meinen Landesgenossen, die diese edle Wissenschaft lieben, einen Dienst möge erwiesen haben: dies ist mein einziger Zweck bei der Ausgabe desselben gewesen; keineswegs dieser, um Ruhm für mich zu erhalten. Ich weiss, dass dazu in diesem Jahrhundert und noch mehr in dieser Periode der Wissenschaften Werke von einer ganz andern Art erfordert werden.

Ich bezeige öffentlich meinem Freunde, dem Herrn *Peter Nieuwland*, Lecktor in der Mathematik, Astronomie und Schiffarthskunde an der erhabenen Schule dieser Stadt, meinen herzlichen Dank für die Mühe, die Er sich genommen hat, nicht allein die Beweisse, sondern auch das ganze Werk, ehe es in Druck gegeben wurde, durchzusehen, und sowohl die Beweisse von vielen Druckfehlern, als das Werk selbst von Nachläsigkeiten zu reinigen und mit wichtigen Anmerkungen zu bereichern. Amsterdam, den 18ten Jul. 1790.

Inhalt.

Vorrede des Ueberſetzers. . . S. III

Vorrede des Verfaſſers. . — IX

Anzeige der angeführten Schriften. — XXIX

Anführung der Sätze Euklids mit Anmerkungen über einige derſelben.

Anzeige der Sätze, welche man zu verſtehen nöthig hat, um alle Probleme auflöſen zu können.

Erklärung der Zeichen, die man gebraucht.

Einleitung. . . — 1

1ſtes Buch. Ueber die allgemeine Eigenſchaften der geraden Linien, ſo wohl an ſich ſelbſt betrachtet, als in ſo ferne ſie die Winkel von Dreiecken und Vierecken bilden, oder dieſer ihre Seiten ſind. — 12

Definitionen. . — 5

Allgemeine Reſultate. . — 18

Axiome. . . — 20

1ste *Abtheilung.* Ueber die geraden Linien, an und für sich selbst betrachtet. S. 23

2te *Abtheilung.* Ueber die Seiten und Winkel der Dreiecke und Parallelogramme — 30

2tes *Buch.* Ueber den Inhalt der geradlinichen Figuren.

1ste *Abtheilung.* Ueber die Dreiecke und Parallelogramme. - — 57

2te *Abtheilung.* Ueber die Vielecke. — 83

3tes *Buch.* Ueber die Proportion. (Verhältnissgleichheit.)

Einleitung, welche allgemeine Definitionen enthält. - — 96

1ste *Abtheilung.* Ueber die Geometrische Proportion.

Definitionen. - - — 109

Eigenschaften der Geometrischen Proportionen. - - — 134

Eigenschaften der Geometrischen Reihen oder Progressionen. - — 160

2te *Abtheilung.* Ueber die Arithmetische Proportion. - — 169

3te *Abtheilung.* Ueber die harmonische Proportion. — 178

4te *Abtheilung.* Ueber die Logarithmen — 195

4tes

4tes Buch. Ueber die (Gleichförmigkeit) Aehnlichkeit der Figuren, und die Verhältnisse ihrer Seiten und Inhalte.

Definitionen. - - S. 213

1ste Abtheilung. Ueber die Aehnlichkeit von Dreiecken und Parallelogrammen, und die Verhältniss ihres Inhalts. — 215

2te Abtheilung. Ueber die ähnlichen Vielecke. - - - — 257

5tes Buch. Ueber den Circel.

Definitionen. - - — 271

1ste Abtheilung. Ueber die Linien, die in oder an den Cirkel gezogen werden. — 276

2te Abtheilung. Ueber die Cirkel, die einander berühren oder schneiden. — 315

6tes Buch. Ueber die darein, und darum beschriebene Vielecke.

1ste Abtheilung. Eigenschaften der Vielecke, die in und um den Cirkel beschrieben sind. - - — 320

2te Abtheilung. Ueber die Vielecke, die durch das Zeichen von Diagonallinien in und ausser andern Vielecken gebildet werden. - - — 368

7tes Buch. Ueber den Umkreis und den Inhalt des Cirkels.

1ste Abtheilung. Ueber die Gränzen der Grössen und der Verhältnisse. - S. 387

2te Abtheilung. Ueber den Umkreis und den Inhalt des Cirkels. - — 403

3te Abtheilung. Ueber die Verhältniss von dem Umkreisse des Cirkels zu dem Durchmesser. - - — 412

Anhang. Ueber die Wurzelziehung aus Zahlen. - - — 443

1. Ueber die Quadrat-Wurzel. - — 444

2. Ueber die Cubik-Wurzel. - - — 452

Inhalt.

Probleme aus den Anfangsgründen der Meſskunde.

Erklärung und Poſtulate. - — 461

1ſtes Buch. Ueber die geraden Linien.

1ſte Abtheilung. Ueber die gleiche Linien, die ſenkrechte Linien und die Parallel-Linien. - — 463

2te Abtheilung. Ueber die Theilung der Linien. - - - — 467

3te Abtheilung. Ueber die Proportional-Linien. - - — 472

2tes Buch. Ueber die Winkel. — 479

3tes Buch. Ueber die geradliniche Figuren.

1ſte Abtheilung. Ueber die Beſchreibung der Figuren. - - 483

2te Abtheilung. Ueber die Beſchreibung der Figuren in Rückſicht auf ihren Inhalt — 491

3te

3te *Abtheilung.* Ueber die Verhältnisse, die Summe und den Unterschied verschiedener geradlinicher Figuren. - S. 498

4te *Abtheilung.* Ueber die ähnlichen Figuren. - - - — 502

4tes *Buch.* Ueber den Cirkel.

1ste *Abtheilung.* Ueber den Mittelpunkt des Cirkels, und die Linien, welche an den Cirkel gezogen werden. - - — 507

2te *Abtheilung.* Ueber die Segmente (Cirkelstücke) und Bögen. - — 509

3te *Abtheilung.* Ueber die Tangenten des Cirkels. - - — 512

5tes *Buch.* Ueber die Beschreibung von Figuren in und um den Cirkel. - — 519

An-

Anzeige
der angefühten Schriften.

D'*Alembert Melanges de Philosophie*: 5 *Theile* in 8vo. Wir haben dieses Werk einige wenige male wegen der vorzüglichen Anmerkungen, die man in demselben über die Art der mathematischen Beweise und der Elemente, die von einigen Geometern gebraucht werden, angeführt.

Archimedes. Die beste Ausgabe ist: *Archimedis opera, quae exstant: illustrata per D. Rivaltum. Parisiis* 1615. *Folio. Tacquet* hat am Ende seines *Euklids* die wichtigsten Lehrsätze *Archimeds* unter dem Titel: „*Selecta ex Archimede Theoremata*" mitgetheilt.

Cagnoli, Traité de Trigonometrie, rectiligne et spherique, traduit de l'Italien. Paris 1786. 4*o*. Das schönste Werk, das mir über diesen Gegenstand besonders in Rücksicht auf die sphärische Trigonometrie

trie, und die Anwendung der Trigonometrie auf die Landmeſskunde, die Algebra und die Aſtronomie bekannt iſt. Alles, was ich in der 3ten Abtheilung ſowohl des 8ten als 9ten Buchs geſagt habe, iſt daraus genommen.

La Caille, *Leçons de Mathématiques.* *Paris*, 1759. 8o.

Dieſer Verfaſſer wird Kürze halber mit den Buchſtaben L. C. angezeigt.

— — *Leçons d'Aſtronomie. Paris*, 1761. 8o.

La Chapelle Inſtitutions de Géometrie. Paris, 1765. 2 *Bände* 8o. Dieſes Werk findet man in der 1ſten Abth. des 7ten beſtändig, und dann noch einmal in dem 4ten Buche angezeigt.

Clavius. S. Euclides.

Deſparcieux, *Nouveau Traité de Trigonometrie avec un Traite de Gnomonique. Paris*, 1741. 4*to.*

Euclides. Sehr zahlreich ſind die Ausgaben der Elemente von *Euklid*: dieſes Werk beſteht aus 15. Büchern, wiewohl höchſt wahrſcheinlich nur dreizehn von *Euklid* ſelbſt ſind; die meiſten Ausgaben enthalten allein die ſechs erſten Bücher, das 11te und das 12te Buch, die ſieben andern Bücher werden jetzt beinahe *niemalen* mehr geleſen. Die Ausgaben in unſerer Sprache, welche *Douw*, *Coets*, *La Bordus*, *Warius* beſorgt haben, ſind genug bekannt. Von ihrem Werthe will ich *mein Urtheil* nicht ſprechen, ſondern allein ſagen, daſs ich niemalen die Ausgabe von allen Büchern *Euklids*, die *C. J. Voogt* im Jahre 1695. in unſerer Sprache veranſtaltet, geſehen

hen habe: und daſs ich unter allen Ausgaben *Euklids* die folgende am höchſten ſchätze:

Euclidis, quae ſuperſunt, omnia: Ex recenſione Davidis Gregorii: Gr. Lat. Oxonii 1703. *folio.*

Elementorum Euclidis Libri XV. curante Buermann. Lipſiae, 1773. 80. Der Verfaſſer hat die Beweiſe *Euklids* beibehalten; doch ſo kurz, als möglich, vorgetragen.

Euclidis Elementorum Libri XV. breviter demonſtrata, opera Ja. Barrow, Cantabrigae. 1655. 80.

Euclidis Elementorum Libri XV. auctore C. Clavio, Francfurti. 1607. Dieſe Ausgabe iſt mit einer ſehr weitläuftigen Erklärung und vielen Zuſätzen geſchmückt: das eine und das andere kann und muſs auch bisweilen zu Rathe gezogen werden: es wird immer mit ſehr viel Nutzen geſchehen.

Elementa Euclidea Geometriae et Selecta ex Archimede Theoremata: quibus accedit Trigonometria: auctore A. Tacquet. Amſtelodami. 1725. Die Anmerkungen und Zuſätze ſind vortrefflich: die wichtigen Lehrſätze *Archimeds* trift man in keinen andern Elementar-Werken an. Die *Trigonometrie* iſt ſehr gut. Dieſe Ausgabe, welche Herr *Muſcheebroek* beſorgte, iſt die beſte, nicht nur weil dieſer Profeſſor die Anmerkungen von *Whiſton* beigefügt, ſondern auch, weil er ſie ſo wohl mit der bereits genannten *Trigonometrie*, als mit der *ſphäriſchen Trigonometrie des Schottus* bereichert hat.

Elé-

Elémens de Géometrie, contenant les six premiers livers d'Euclid par M. Koenig, augmentés de l'onzieme et du douzieme livre par J. J. Blassiere: La Haye. 1762. 4.

Diese Ausgabe ist besonders wegen der vortreflichen Erklärung des 5ten Buchs, und des Anhanges zu eben diesem Buche, worin *Herr König* die Art der Logarithmen sehr gut erklärt, anzupreisen.

Wir haben auch in dem 11ten Buche die folgende Ausgabe angeführt.

Euclides Elementa Geometrica, Libri XV. cui accessit Liber XVI. ac. authore Francisco Flussate Candalla: Parisiis. 1566. *Folio.*

Euler Introductio ad Analysin infinitorum. Genevae. 1748. 2 *Theile*, 40.

Hennert Elementa Matheseos purae: Ultrajecti 1766. 3 *Vol.* 8. *Die Arithmetik* wird durch den Buchstaben *a*, die *Geometrie* durch den Buchstaben *g* angezeigt.

La Hire, Sectiones Conicae. Parisiis. 1685. Fol. Eines der vorzüglichsten Werke, nach der Art der Alten geschrieben: der erste Theil enthält einige Lehrsätze über Linien, die in *harmonischer Proportion* geschnitten sind: und deswegen habe ich dieses Werk in dem 3ten Buche angezeigt.

Horrebow, in continuam proportionem harmonicam Mathemata. 1737. in dem ersten Theile seiner *Opera Mathematico-Physica. Havniae,* 1740. 3 *Vol.* 40. aufs neue gedruckt.

Huy-

Huygens, *de Circuli magnitudine inventa*: *Lugd. Batav.* 1654. 4to. in seinen *Opera varia*: *Lugd. Batav.* 1724. 4to. aufs neue herausgegeben.

L'Huilier Exposition élémentaire des principes des calculs supérieur. Berlin, 1786. 4.

Karsten, *Mathesis theoretica elementaris atque sublimior. Rostockii et Gryphiswaldiae*, 1760, 8vo.

König. Siehe Euclides.

G. W. Krafft Institutiones Geometriae sublimioris. Tubingae, 1753. 4to.

Lami Elemens de Mathematiques, ou Traité de la grandeur. Amsterdam. 1710. 8vo. Ein sehr nützliches Werk. Wir haben allein von dem letzten Theile des 8ten Buches, welches über die harmonische Proportion handelt, Gebrauch gemacht.

Ludolph van Ceulen, *von dem Circel*. *Leiden*, 1615. 2 *exdrak*. 4to.

— — — *Fundamenta Arithmetica et Geometrica vernaculo in latinum translata, a W. Sn. R. F. (W. Snellio, Rudolph. Folio.) Lugd. Batav.* 1615. 4to.

Maclaurin, *Traité des Fluxions. Paris*, 1746. 2 *Vol.* 4to Aus dem Englischen übersetzt.

Montucla. Histoire des Mathématiques. Paris, 1758. 2 *Vol.* 4to.

— — — *Histoire des Recherches sur la Quadrature du Cercle. Paris*, 1754. 8v. Ein vorzügli-

züglicher Werk, das ohne den Nahmen des Verfassers herausgekommen ist.

Newton, *principia Philosophiae naturalis mathematica. Londini*, 1726. 4to.

Pappi, Alexandrini, Collectiones Mathematicae, à Frederico Commandino editae. Bononia, 1660. *Folio.*

Ptolemaei, Almagaestum seu magnae compositionis mathematicae opus. In des Verfassers Werken, von Erasmo Oswald. *Schrikkenbusius* in lateinischer Sprache herausgegeben. *Basiliae*, 1551. Folio.

Robert Simson, Sectionum Conicarum libri quinque. Edenburgi, 1750. 4to.

Th. Sempson. Elements of Geometry. 2te *Edition. London*, 1760. 8.

Willebordi, Snellii Cyclometricus. Lugd. Batav. 1621. 4to.

Steenstra, Grondbeginsels der Meetkunst. Leyden, 1779. 3te Auflage. Kürze wegen wird dieser Verf. *nur mit den Buchstaben* S, oder St. angezeigt.

Tacquet: S. Euclides.

Vieta, Opera Mathematica, opera atque studio Fr. van Schooten. Lugd. Bat. 1646. *Folio.*

Viviani, de locis solidis, secunda divinatio geometrica. Florentiae. 1701. *Folio.*

Wal-

Wallis, de Algebra tractatus. Dieses Buch ist in dem Iahre 1685. im Englischen herausgekommen, und im Lateinischen wieder erschienen in dem 2ten Th. der *Opera Mathematica dieses Mannes. Oxford.* 1693. 3 *Vol. Folio.*

Wolf, Grondbeginsels van alle Mathematische Weetenschappen. Amsterdam, 1738. 3 *Theile in* 8. Wir haben bloss den ersten Theil angeführt: und die Arithmetik mit dem Buchstaben *a*, die Geometrie mit dem Buchstaben *g* und die Trigonometrie mit dem Buchstaben *t* angezeigt. Kürze halber wird dieser Verf. allein mit dem Buchstaben *W.* angeführt. Auch haben wir hier und da das lateinische Werk desselben angezeigt: nemlich:

Elementa Matheseos universae. Halae, 1742. 5 *Theile in* 4*to.*

Von den *Sinus-* und *Logarithmus-Tafeln* giebt es viele Ausgaben in allen Sprachen, die beste sind:

Tafelen bevattende de Sinussen, Tangentem, en Secanten en benevens derzelver Logarithmen, als mede de Logarithmen der gewoone getalen van tot 10,000 *door B. J. Douwes le Amsterdam by G. Hulst van Keulen* 1779. *in* 8*vo.*

Und besonders seine grössern Tafeln, die den Titel haben: *Tafelen, behelzende de Sinussen, Tangenten, Secanten, en Sinus versusenz, benevens de vergrootende breedte, als mede de Logarithmen voor alle getallen, van* 1 *tot* 100000; *door B. J. Douwes. Te Amsterdam, by J. van Keulen, en Zoonen.* 1776. 8*vo.*

Diese sind nicht nach den Tafeln von *Sherwin* eingerichtet; doch da der Herr *Douwes* gut gefunden hat, in den Tafeln der Logarithmen von den *Sinussen* u. s. w. die Proportional-Theile wegzulassen; so haben diese Tafeln einen viel geringern Nutzen, als die von *Sherwin*, welche unter dem Titel herausgekommen sind:

Sherwin's Mathematical Tables: the fourth edition: carefully revised and corrected by William Gardiner. London, 1761. 8*vo.*

Vermuthlich sind davon seit der Zeit noch neue Ausgaben erschienen. Die ausführlichste und beste Tafeln sind ausser derer von *Vlak*, die in den Jahren 1628 und 1633. *zu Gouda* in *Folio* erschienen, welche man aber jetzt sehr selten sieht und sehr theuer sind, die grosse *Logarithmus-Tabellen* von *Gardiner*, die *im J.* 1742. *zu London in* 4*to*. herauskamen: man findet darin die *Logarithmen der Sinusse* u. s. w. von 10 zu 10 *Secunden*: diese Tafeln wurden im Französischen mit vielen und wichtigen Vermehrungen durch den Herrn *Pezenas* unter dem Titel:

Tables des Logarithmes, contenant les Logarithmes des nombres depuis jusqu'à 102100 *Kl. publiées ci-dévant par M. Gardiner. Avignon*, 1770. *Quarto*, *herausgegeben.*

Doch vor einigen Jahren wurden diese Tafeln wieder mit aller möglichen Genauigkeit in 8vo gedruckt und was die Anordnung mit den Logarithmen betrift, erschienen sie verbessert unter dem Titel:

Tables

Tables portatives de Logarithmes, publiées à Londres par Gardiner, augmentées et perfectionées dans leur disposition par M. Callet. Paris, chés Didot. 1783.

Diese Tafeln verdienen, meiner Meinung nach, den Vorzug vor allen anderen. Man hat jedoch zu bemerken, daſs man in denſelben (wie in denen von *Pezenas* oder *Gardiner*) die *natürliche* oder *einfache* Sinuſſe, Tangenten und Sekanten nicht, wie in den gewöhnlichen Tafeln, antrift. Da jedoch die *natürliche* Sinuſſe in einigen Theilen der Steuermannskunſt wohl zu Statten kommen, ſo muſs man ſich auch mit einigen dieſer ſchon genannten *kleinen Tafeln* verſehen, wiewohl man ohne viele Mühe, aus dem *Logarithmus-Sinus den natürlichen Sinus*, durch die Tafeln der Logarithmen beſtimmen kann.

Unter allen Ausgaben von *kleinen Tafeln* der *Logarithmen*, die bei weitem in den meiſten Fällen der Praxis hinreichen, und als ein Handbuch dienen können, ſind folgende die beſte, beſonders in Rückſicht der vortrefflichen Anordnung der Zahlen:

Tables de Logarithmes pour les Sinus et Tangentes de toutes les minutes du quart du cercles et pour tous les nombres naturels dépuis, jusqu'à 10800. *Paris chés Guérin et de la Tour.* 1760. 8vo.

Es kann bisweilen in der Praxis nützlich und angenehm ſeyn, mit dem Aufſchlagen das Quadrat oder den Cubus von irgend einer Zahl zu finden, oder die Quadrat- oder Cubik-Wurzel irgend einer Zahl nachſuchen zu können: hiezu dienen die ſo genannte Quadrat- und Cubik-Tafeln, die man in einigen Bü-

chern, die über die Algebra geschrieben sind, und auch allein findet; die bequemste sind die, welche von *Büchner* mit einer Hochdeutschen Erklärung unter dem Titel herausgegeben wurden: *Joh. Paul Büchners Tabula radicum quadratorum et cuborum bis auf* 12000. *Nürnberg*, 1701. *in groß* 8*vo.* Diese Tafeln sind jedoch nicht von Druckfehlern frei.

Man findet auch Tafeln von den Quadraten und Cubis der natürlichen Zahlen bis auf 1000, in dem Werke, das unter dem Titel erschien:

Zusätze zu den Logarithmischen und Trigonometrischen Tabellen. Berlin, 1770. 8*vo.*

Man hat auch für die Quadrate sehr ausführliche Tabellen von *Ludolph*, unter dem Titel:

Tetragonometria tabularia Auctore L. J. Ludolfio. Amstelodami. 1690. *In Quarto.*

Ver-

Verzeichniſs

der Sätze Euklids, die mit den Sätzen dieſes Werks übereinſtimmen.

NB. *Der Buchſtabe A, deutet das Buch der Aufgaben an.*

1ſtes Buch Euklids.

1.	Satz iſt bei uns	A. 3, 2.
2.	— — —	A. 1, 1.
3.	— — —	A. 1, 2.
4.	— — —	1, 8.
5.	— — —	1, 10. *)
6.	— — —	1, 11. *)
7.	— — —	a)

a) (Fig. 28.) „Wenn aus den Punkten A und C einer Linie, AC, zwo Linien AB, BC, gezogen werden, die mit einander in B zuſammen treffen; ſo kann man auf der Linie AC, an eben derſelben Seite, und aus eben denſelben Punkten keine zwo andere Linien, die den bereits ge-

*) Dieſe 2 Säze ſtehen gerade umgekehrt angezeigt da.
Anm. des Ueberſetzers.

8. — — — I, 12.
9. — — — A. 2, 1.
10. — — — A. 1. 7.
11. — — — A. 1, 3.
12. — — — A. 1, 5.
13. — — — I, 1.
14. — — — I, 2.
15. — — — I, 3.
Das Corollarium aus dieſem
Satze iſt bei uns — I, 3. Cor.
16. — — — I, 7. 4.
17. — — — b)
18. — — — ⎫
19. — — — ⎭ I, 14.
20. — — — I, 15.
21. — — — I, 16.
22. — — — A. 3, 1.
23. — — — A. 2, 3.

genannten gleich, die eine der andern (nemlich, AG = AB; GC = BC,) wären, und die in einem andern Punkte G, welcher von dem erſt genannten verſchieden wäre, zuſammen träfen, ziehen.“ Dieſer Lehrſatz iſt allein geſchickt, den 8ten zu beweiſsen, und ſein Beweis iſt in der That ein Theil des Beweiſes dieſes ſo eben angeführten Satzes, welcher bei uns der 12te Satz des erſten Buches iſt.

b) „Zween Winkel in einem Dreiecke ſind kleiner, als 2 rechte Winkel“. Dies iſt in dem 7ten Lehrſatze unſeres erſten Buches ſtillſchweigend aufgeſchloſſen.

24. Satz — — 1, 17.
25. — — — c)
26. — — — 1, 9.
27. — — —
28. — — —) 1, 4.
29. — — —
30. — — — 1, 5.
31. — — — A. 1, 6.
32. — — — 1, 7.
33. — — — 1, 18.
34. — — — 1, 19.
35. — — —
36. — — —) 2, 1.
37. — — —
38. — — —) 2, 6.
39. — — —
40. — — —) 2, 6. 2 Cor.
41. — — — 2, 1, 6. C.
42. — — — A. 3, 11.
43. — — — 1, 19. 4.
44. — — — A. 3, 13.
45. — — — A. 3, 16.
46. — — — A. 3, 4.
47. — — — 2, 7.
48. — — — 2, 7. 3.

2tes Buch Euklids.

1. Satz, der bei uns 2, 1. 3. ist;
2. — — — 2, 1. 4. —
3. — — — 2, 1. 5. —

c) Ist der umgekehrte des 24sten S. und also auch bei uns des 1, 17.

4. Satz — — 2, 2.
5. — — — 2, 3.
6. — — — 2, 4. Cor.
7. — — — 2, 2, 3.
8 — — — 2, 4.
9. — — —) 2, 2, 4. 5.
10. — — —
11. — — — A. 1, 12.
12. — — —) 2, 9.
13. — — —
14. — — — A. 3, 19.

3tes Buch Euklids.

1. S. ist bei uns A. 4, 1.
2. — — — 5, 1.
3. — — —) 5, 6.
4. — — —
5. — — —) 5, 14.
6. — — —
7. — — — 5, 10.
8. — — — 5, 11.
9. — — — 5, 10. C.
10. — — — 5, 17.
11. — — —) 5, 15.
12. — — —
13. — — — 5, 16.
14. — — — 5, 11. 2 Cor.
15. — — — 5, 11. 1 Cor.
16. — — — 5, 7.
Das Cor. d. Satzes 5, 8.
17. — — — A. 4, 12.
18. — — —) 5, 8.
19. — — —

20. — — — 5, 3.
21. — — — 5, 3. 3.
22. — — — 6, 6.
23. — — — 8, 3. 3.
24. — — — 8, 3. 2.
25. — — — A. 4. 2.
26. — — — } 5, 4.
27. — — — }
28. — — — } 5, 4. 5.
29. — — — }
30. — — — A. 4, 7.
31. — — — 5, 5.
32. — — — 5, 9.
33. — — — A. 4. 5.
34. — — — A. 4. 6.
35. — — — 5, 12.
36. — — — } 5, 13. 2.
37. — — — }

4tes Buch Euklids.

1. Satz ist bei uns A. 4, 3.
2. — — — A. 5, 1.
3. — — — A. 5, 2.
4. — — — A. 5, 4.
5. — — — A. 5, 5.
6. — — — A. 5, 6.
7. — — — A. 5, 7.
8. — — — A. 5, 8.
9. — — — A. 5, 9.
10. — — — A. 3, 10.
11. — — — A. 5, 11.
12. — — — A. 5, 12.

5tes

4tes Buch Euklids.

13te Satz ist bei uns A. 5, 13.
14. — — — A. 5, 14.
15. — — — A. 5, 15.
16. — — — A. 5, 16.

5tes Buch Euklids.

Der 1ste, 2te, 3te, 5te und 6te Satz, betreffen die eigenthümliche Lehre Euklids in Rücksicht der *Gleichvielfachen*.

Der 4. S. ist bei uns 3, 1.
7. — — — 3, 1. Ax.
8. — — — 3, 2. Ax.
9. — — — 3, 3. Ax.
10. — — — 3, 2. Ax.
11. — — — 3, 5. Ax.
12. — — — 3, 17.
13. — — — 3, 6. Ax.
14. — — — 3, 9.
15. — — — 3, 4. Ax.
16. — — — 3, 7.
17. — — — }
18. — — — } 3, 8.
19. — — — 3, 8 S. C. u. 2. Ax.
20. — — — }
21. — — — } 3, 11. 1. Cor.
22. — — — }
23. — — — } 3, 11.
24. — — — 8, 12. Anm.
25. — — — 3, 9. 2. Cor.

6tes

6tes Buch Euklids.

1. S. ist bei uns 4, 6.
2. — — — 4, 1.
3. — — — 4, 9.
4. — — — 4, 2. 2. Anm.
5. — — — 4, 3.
6. — — — 4, 4.
7. — — — 4, 5.
8. — — — 4, 12.
9. — — — A. 1, 9.
10. — — — A. 1, 10.
11. — — — A. 1, 15.
12. — — — A. 1, 16.
13. — — — A. 1, 18.
14. — — — } 4, 7. 4. C.
15. — — — }
16. — — — } 4, 7. 5. C.
17. — — — }
18. — — — A. 3, 29.
19. — — — 4, 13.
20. — — — 4, 15.
21. — — — *a*)
22. — — — 4, 16.
23. — — — 4, 7. 2. C.
24. — — — *b*)

25.

a) Der Satz ist: „Geradliniche Figuren, die einer „und derselben Figur ähnlich sind, sind unter einan-„der selbst ähnlich.“ Dies ist in der That ein Axioma.

b) Der Satz heisst (Fig. 32.); „Die Parallelogramme „HI und FE, die um die Diagonale eines Paral-lelo-

25.	—	—	—	A. 3, 30.
26.	—	—	—	*c*)
27.	—	—	—	*d*)
28.	—	—	—	
29.	—	—	—	
30.	—	—	—	A. 1, 12.
31.	—	—	—	4, 20.
32.	—	—	—	*e*)
33.	—	—	—	8, 1.

7tes

„lelogramms AD liegen, ſind unter einander und „dem gegebenen Parallelogramm ähnlich.“ Er kann als ein Corollarium unſeres 2ten Satzes im 4ten Buche betrachtet werden.

c) Die Worte ſind: „Wenn man (Fig. 32.) von einem Parallelogramm AD ein □ G B wegnimmt, das dem zuerſt genannten ähnlich iſt, und ähnlich liegt, und einen Winkel mit demſelben gemeinſchaftlich hat; ſo wird dieſes Parallelogramm um die Diagonale des zuerſt genannten Parallelogramms liegen.“ Sieh hierüber die Anmerkung zu 4, 2, 3. C.

d) S. hierüber die 8te und 9te Anm. zum 12ten S. im 5ten Buche.

e) Der Satz iſt: „Wenn zwey Triangel (Fig. 65.) ABC und CDE, worin zwey Seiten mit zwoen Seiten (AB : CD = BC : DE) proportionirt ſind, und dergeſtalt mit einem Winkel (BCA und DCE) an einander gebracht werden, daſs die homologen Seiten AB und CD; BC, und DE parallel

ſind;

7tes Buch Euklids.

NB. Dieses Buch, das 8te und 9te, handeln über die Eigenschaften der Zahlen: und daher gehören sie nicht zur Geometrie. Indessen werden aus ihnen in unserem Werke einige Definitionen erklärt, und einige Sätze bewiessen: nemlich

die 5te Definition ist bei uns 3ten Buchs 2. Definition.
16. — — wird entwickelt 4, 7. 7. 8. 9te Anm.
17. — — — — — 11, 11. 3, 2te Anm.
18. — — — — — 4, 15, 1.
19. — — — — — 11, 12. 1.
20. — — — — — 3ten B. 11. Def. 4. Anm.
21. — — — — — 4, 7. 7. Anm. 9. und 11ten Buches 11. S. 3. C. 2 Anm.

Der 11te Satz ist bei uns 3, 8.
12. — — — 3, 17.
13. — — — 3, 7. und 3, 7. 2te Anm.
14. — — — 3, 11.
17. — — — } 3, 4tes Ax.
18. — — — }
19. — — — 3, 5.
20. — — — 3, 5. 1.
22. kömmt mit 3, 11. überein.

8tes

sind; so werden die zwo übrigen Seiten (AC u. CE) *eine* gerade Linie ACE bilden, dies wird leicht aus 1, 4. 4, 4. 1, 7. 1. 2. bewiesen. *)

*) Dieser Satz hat nicht aller dieser Citationne zum Beweisse nöthig.

Anm. des Uebersetzers.

8tes Buch Euklids.

Der 5te Satz iſt bei uns 4, 7. 7tes Cor. 9te Anm.
11. — — — 4, 7. 7. am End.
12. — — — 11, 11. 3.
13. — — — 3, 10. 1.
18. — — — 4, 15. 2.
19. — — — 11, 12. 3tes u. 5s. C. 1ſte Anm.
21. — — — 11, 12. 5. 1.
26. — — — 4. 15, 2.
27. — — — 11, 12. 3.

9tes Buch Euklids.

8te Satz iſt bei uns
wie auch } 3, 16, 1.
9te Satz —
18te 19te Satz *a*)
35ſte Satz iſt bei uns 3, 17. 2.

10tes

a) In dieſen Sätzen ſucht Euklid zu beſtimmen, ob man zu zwoen oder dreien Zahlen eine dritte oder vierte Proportionalzahl finden könne. Dieſes ſcheint mit 3, 5, 3. , wo wir die Regel, dieſe Zahlen zu finden, als allgemein vorgetragen haben, zu ſtreiten. Doch die Urſache davon iſt, daſs *Euklid* unter dem Worte *Zahl* eine ganze Zahl ohne Brüche verſteht, wir aber Zahl überhaupt, ſie ſey ganze Zahl oder Bruch, nehmen. Wenn nun das Product der mittelſten Zahlen nicht ohne Reſt durch die erſte dividirt werden kann, ſo iſt die geſuchte Zahl keine ganze Zahl, und folglich, nach dem Sinne, in welchem *Euklid* dieſes Wort nimmt, keine Zahl.

10*tes Buch Euklids.*

In dieſem Buche, das ſehr ſchwer zu verſtehen iſt, behandelt der Verfaſſer die Lehre der immenſurablen Gröſsen ſehr vollſtändig und auf Art der Alten. Wir tragen auch einige ſeiner Definitionen und Sätze an einigen Stellen unſers Werks vor.

Die 2te Definition iſt bei uns 3, 7te Definition.
3.
4. } Siehe hierüber 4, 7. 9. No. 4.
5.
6.

Der 1ſte Satz iſt bei uns 7, 1.
9te Satz — — 4. 7. 9. No. 4.
15. — — — Lemma iſt bei uns 2, 7. 1.
22. — — — ſtimmt mit 4, 7. 9. 1. überein.
34. — — — 1ſter Lehrſatz iſt 2, 8. das 2te Cor.

11*tes Buch Euklids.*

Der 1ſte Satz iſt bei uns 10. B. 1ſte Def. Anm.
2. — — — 10. — 1 Lehrſ. u. 2 Cor.
3. — — — 10. — 2 Def. Anm.
4. — — — 10. 2. S.
5. — — — 10, 3.
6. — — — 10, 4.
7. — — — a)

8.

a) „Wenn zwo gerade Linien parallel ſind, und „man auf jeder derſelben einen Punkt annimmt, „und

8.	—	—	—	10, 4.
9.	—	—	—	10, 5.
10.	—	—	—	10, 6.
11.	—	—	—	10, 2. 1. Anm.
12.	—	—	—	10, 4. Anm.
13.	—	—	—	10, 2. 1. Cor.
14.	—	—	—	10, 7.
15.	—	—	—	10, 6.
16.	—	—	—	10, 7. 2.
17.	—	—	—	10, 8.
18.	—	—	—	10, 2. 3.
19.	—	—	—	10, 2. 5.
20.	—	—	—	11, 1.
21.	—	—	—	11, 2.
22.	—	—	—	11, 2te Def: 2tes Cor. Anm.
23.	—	—	—	11, 3, 2.
24.	—	—	—	11. 6te Def. 1ſtes Cor.
25.	—	—	—	11, 6.
26.	—	—	—	11, 4. 1.
27.	—	—	—	11, 6te Def. 3tes Cor.
28.	—	—	—	11, 5.
29.	—	—	—	11, 7.
30.	—	—	—	11, 7.
31.	—	—	—	11, 8.
32.	—	—	—	11, 9.
33.	—	—	—	11, 12.
34.	—	—	—	11, 11. 1.
35.	—	—	—	11, 4. 2.

36.

„und man verbindet dieſe Punkte durch eine „gerade Linie; ſo wird dieſe Linie mit den „Parallelen in der nemlichen Ebene liegen." Dieſes iſt ein Axiom.

36.	—	—	—	11, 12. 4.
37.	—	—	—	11, 12. 2.
38.	—	—	—	10, 2. 4.
39.	—	—	—	11, 5. 2.
40.	—	—	—	11, 15. 1.

12tes *Buch Euklids.*

Der 1ste Satz ist bei uns				6, 9.
2.	—	—	—	7. 14.
3.	—	—	—	11, 19.
4.	—	—	—	11, 20.
5.	—	—	—	11, 22.
6.	—	—	—	11, 23.
7.	—	—	—	11, 24.
8.	—	—	—	11, 25. 6.
9.	—	—	—	11, 25. 4.
10.	—	—	—	12, 8.
11.	—	—	—	12, 2. 2. u. 9ten S. 1stes Cor.
12.	—	—	—	12, 5. u. 9ter S. 3tes C.
13.	—	—	—	} 12, 2. 4. u. 9ten S. 1stes Cor.
14.	—	—	—	}
15.	—	—	—	12, 9. 2.
16.	—	—	—	} *a*)
17.	—	—	—	}
18.	—	—	—	12, 23.

a) Zwo unnütze Aufgaben, doch kann ein Theil der Ausführung von dem 17ten Satze zu unserem 5ten Cor. des 32sten S. im 11ten Buch gezogen werden.

13*tes Buch.*

Der 1ste Satz dieses Buchs ist bei uns 4, 7. 6. 7.
2. — — —
3. — — —) *a*)
4. — — —
5te Satz ist bei uns 4. B. 2. Def. 2. Anm.
6te Satz ist bei uns 4, 7. 6. 6.

7ter

a) Die Alten machten viel Aufhebens von dem Schnitte einer Linie nach stetiger Proportion: daher nannten sie auch diesen Schnitt den *Göttlichen Schnitt*. Um nichts von dem, was man bei *Euklid* in unserer Rücksicht findet, zu übergehen, werden wir anzeigen, wie diese Sätze, die wir in unser Werk nicht eingeschoben haben, doch aus denen, welche wir bewiessen, folgen, und um den lernbegierigen Leser an die Methode der Alten zu gewöhnen, werden wir die sechs ersten Sätze Euklids folgen lassen, nachdem wir zuvor erinnert haben, dass wir in dem 8ten Cor. des 7ten Satzes im 5ten Buche erklärt haben, was die Alten unter *Macht* einer Linie verstehen. Hier gebe ich die Sätze *Euklids* nach ihrer Ordnung, doch habe ich sie aus der 6ten 7ten und 8ten Anmerkung zu 4, 7, woraus diese alle Corollaria sind, bewiesen.

1*ster Satz.* *) Wenn eine gerade Linie nach stetiger Proportion geschnitten wird: so ist das Quadrat einer

*) Wir haben diesen Satz jedoch nach Hr. I. Fr. Lorenz Uebersetzung der Elemente Euklids, Halle 1781. In Verlag der Buch-

einer Linie, welche aus dem grössern Abschnitte und aus der Hälfte von der ganzen bestehet, fünfmal so gross, als das Quadrat der Hälfte von der ganzen.

Das heist Fig. 155. □ auf (BH + $\frac{1}{2}$ BD) = 5 □ auf $\frac{1}{2}$ BD
oder BH + $\frac{1}{2}$ BD = $\frac{1}{2}$ BD + $\sqrt{5}$.

1stes Cor. Folglich BH = $\frac{1}{2}$ BD $\sqrt{5}$ − $\frac{1}{2}$ BD = $\frac{1}{2}$BD ($\sqrt{5}$ − 1.)

S. 1te Anm. zu 4, 7.

2tes Cor. Folglich BD = $\frac{2BH}{\sqrt{5-1}}$.

2ter Satz. „Wenn das Quadrat einer geraden Linie KI, fünfmal so gross ist, als das Quadrat eines Stücks derselben, BK, so ist das Zwiefache dieses Stücks, AD, nach stetiger Proportion geschnitten, und der grössere Abschnitt das übrige Stück der erstgedachten Linie, BI." S. Lor. Uebers. Euklids p. 322. *)

d 3 *Be-*

Buchhandlung des Waisenhauses angezeigt; wie wir es auch bey den folgenden 5. Sätzen gethan haben. Dieser Satz ist übrigens in unserem Original nach Euklid so ausgedruckt: „Wenn eine Linie nach stetiger Proportion ge„schnitten ist, so *kann* der gröste Theil nebst der „Hälfte der ganzen Linie, das Fünffache des Quadrats der halben Linie."

Anm. des Uebers.

*) Dieser Satz ist in unserem Texte nach *Euklid* also ausgedruckt: „Wenn eine Linie KI (Fig. 155.) das Fünffache *kann* von ihrem Theile BK, und das Zweifache „BD von diesem Theile in stetiger Proportion geschnit„ten ist; so wird das gröste Stück davon dem Reste BI von der erst gedachten Linie KI gleich seyn.

Beweis. Nach dem Gegebenen ift $KI = BK\sqrt{5}$; folglich $BI = KI - BK = BK\sqrt{5} - BK = BK(\sqrt{5} - 1.)$ Aber wenn $BD = 2BK$ nach ftetiger Proportion gefchnitten wird, fo ift der gröfte Theil $= \frac{1}{2}BD(\sqrt{5} - 1.) = BK(\sqrt{5} - 1.)$. S. den vorhergehenden Satz. Folglich ift der gröfte Theil, BI gleich.

3ter Satz. „Wenn eine gerade Linie L, nach ftetiger Proportion gefchnitten wird: fo ift das Quadrat einer Linie, welche aus dem kleineren Abfchnitt (K) und der Hälfte von dem gröfsern (G) befteht, fünfmal fo grofs, als das Quadrat der Hälfte von dem gröfsern Theile (G).“ S. Lor. Ueberf. Euklids p. 324. *)

Beweis. Da $K : G = \frac{1}{2}L(3 - \sqrt{5}) : \frac{1}{2}L(\sqrt{5} - 1)$; (S. 6te und 7te Anm. zu 4, 7.); fo ift $K : G = 3 - \sqrt{5} : \sqrt{5} - 1$; und folglich (nach 3, 5;) $K = \frac{G(3 - \sqrt{5})}{\sqrt{5} - 1}$; und $K + \frac{1}{2}G = \frac{1}{2}G\left(1 + 2\frac{(3 - \sqrt{5})}{\sqrt{5} - 1}\right) = \frac{1}{2}G\left(\frac{\sqrt{5} - 1 + 6 - 2\sqrt{5}}{\sqrt{5} - 1}\right) = \frac{1}{2}G\frac{(5 - \sqrt{5})}{\sqrt{5} - 1.} = \frac{1}{2}G.\sqrt{5}.$

4ter Satz. „Wenn eine gerade Linie, L, nach ftetiger Proportion gefchnitten wird: fo ift das Quadrat

*) Nach unferem Texte kann diefer Satz überfetzt werden: „Wenn eine Linie L. in ftetiger Proportion ge„fchnitten ift, *kann* der kleinfte Theil (K) mit der Hälfte „des gröften (G) das Einfache das □ auch der Hälfte „des gröften Theiles (G).“

drat der ganzen, L, nebst dem Quadrat des kleinern Abschnitts, K, zusammen, dreymal so groſs, als das Quadrat des gröſsern Abschnitts, G. S. Eukl. Uebers. von Hr. Lorenz. p. 325.

Beweis. $\square$ auf $K = \frac{1}{4} \square$ auf $L + (3 - \sqrt{5})^2$ (s. 4. 7. 6. 6.);

folglich $\square$ auf $K + \square$ auf $L = \frac{1}{4} \square$ auf $L\ (4 + 9 - 6\sqrt{5} + 5) = \frac{1}{4} \square$ auf $L + (18 - 6\sqrt{5}.)$

Aber $\square$ auf $L = 4 \frac{\square \text{ auf } G}{(\sqrt{5} - 1)^2}$ (1. S. 2. Cor. s. oben);

folglich $\square$ auf $K + \square$ auf $L = \frac{\square \text{ auf } G (18 - 6\sqrt{5})}{6 - 2\sqrt{5}} = 3$ $\square$ auf G.

5ter Satz. Wenn eine gerade Linie (L) nach stetiger Proportion geschnitten, und ihr eine dem gröſsern Abschnitt (G) gleiche beygefügt wird: so ist die ganze Linie (G + L) nach stetiger Proportion geschnitten, und der gröſsere Abschnitt die zuerst gedachte Linie (L). S. Eukl. Uebers. von Hr. Lorenz 13ter B. 5. Satz p. 326. *)

S. den Beweis 4, 2. Def. 2. Anm.

1ste Anm. Aus diesem Beweise erhellet, daſs man auch folgenden Schluſs hätte machen können:
$L : G = G : K$: folglich $L - G : G = G - K : K$: d. h.

d 4 K:

*) Wir führen diesmal die Uebersetzung unseres Textes nicht an, da sie beynahe mit denselben Worten, womit Hr. Lorenz sich ausdrückt, angegeben wird. Eben dies gielt auch von dem folgenden Satze.

K : G = G — K : K oder G — K : K = K : G (= L — K.) das heiſst: „Wenn eine Linie nach ſtetiger Pro„portion geſchnitten wird, und man von dem „gröſten Theile (man fange an dem äuſserſten „Ende der Linie an) ein Stück, das dem klein„ſten gleich iſt, abſchneidet; ſo wird der Ueber„ſchuſs auch in ſtetiger Proportion geſchnitten: „und das kleinſte Stück der gegebenen Linie, „wird nun das gröſte Stück ſeyn.“ *)

2te Anm. Es erhellet alſo, daſs, wenn man eine Linie hat, die nach ſtetiger Proportion geſchnitten iſt, man immer gröſsere, auch kleinere, ſo viel man ihrer will, finden kann: man hat nur der gegebenen Linie ein Stück, das dem gröſten Theile gleich iſt, beyzufügen, oder ein Stück, das dem kleinſten Theile gleich iſt, davon weg zu nehmen: und ſo beſtändig mit jeder der Linien, die alsdann entſtehen, fortzufahren.

6ter Satz. Wenn eine (gerade) Linie nach ſtetiger Proportion geſchnitten iſt; ſo iſt jeder der beyden Abſchnitte irrational (unmeſsbar), genannt Apotome.

Be-

*) So wahr dieſer Satz nach den allgemeinen Zeichen des Beweiſses iſt; ſo undeutlich ſcheint er mir in den Worten des Hrn. Verf. ausgedrückt zu ſeyn, und ſo unrichtig kann Er auch ſeyn.

7ter Satz *b*)
8ter S. ist bei uns 4, 21. 2ter Theil.
9ter S. — — 6, 13. 3. Cor.
10ter S. — — 6, 14.
11ter S. — — 6, 14. 1. *c*)
12ter S. — — 6, 16. was den ersten Theil davon betrift.
13. — — — 12, 25. Anm. 2. No. 1. und Anm. 4. No. 1.

Beweis. S. den nemlichen Satz 4, 7. Anm. 6. 7. P. 152, 153. wo wir gezeigt haben, daſs $G = \frac{1}{2} L. (\sqrt{5} - 1.)$ und $K = \frac{1}{2} L (3 - \sqrt{5}.)$ Zwar nennt Euklid *Apotome* (10, 74.) den Unterschied zwoer Gröſsen, die der Länge nach unmeſsbar, doch der Macht nach meſsbar (rational) sind: so wie hier $\sqrt{5}$, 1, und 3 sind; denn die Vierecke 5, 1, 9. sind rational.

b) *Der 7te Satz* ist dieser: „Wenn in einem gleichseitigen Fünfecke drei Winkel, diese mögen auf einander folgen oder nicht, gleich sind; so ist das Fünfeck gleichwinklich.“

c) Der Satz *Euklids* ist dieser: „Wenn man ein Fünfeck in einen Cirkel, dessen Diagonale meſsbar ist, beschreibt; so ist die Seite des Fünfecks eine unmeſsbare Gröſse, die man die *kleine unmeſsbare* nennt.“ Wir haben bewiesen, 6, 14. 1. daſs die Seite des Fünfecks in Beziehung auf den Radius unmeſsbar ist: hierauf: S. 11, 33. Cor. No. 3., daſs, wenn BG der Radius

13. S. Lehnſatz — 4, 12. 3. Cor.
14. — — — 12, 25. 2te Anm. 2te No. und"
„4te Anm. 2te No.
15. — — — 12, 25. 2te Anm. 3te No. „und"
„4te Anm. 4te No.
16. } — — 12, 25. 2te Anm. und 4te Anm."
17. } „3te und 5te NNoo,
18. — — — 12, 25. 2te und 3te Anm.
18. S. Scholium 11, 30. 1ſtes Cor.
— Lemma ſtimmt, was das Fünfeck betrift, mit 2, 11. 1. Cor. überein.

14tes Buch Euklids.

Der erſte Satz iſt bei uns 6, 13. 2. Cor.
„das Cor. — — 6, 8. 3tes Cor. „was den erſten Theil betrift.
2ter S. — — — 12, 25. 5tes Cor.
— Lemma — — 6, 14. 2tes Cor.
3ter S. — — — 11, 34. 5te No.
4. — — — — 12, 25. 5te Anm. 1ſtes Cor.
— Lemma — — 6, 15.
5ter S. — — — 12, 25. 5te Anm. 8tes Cor.
6ter S. — — — 12, 25. 5te Anm. 2tes Cor.
7ter S. — — — 4, 7. 8te Anm.

15tes

15tes Buch Euklids.

Der erſte Satz iſt bei uns 11, 32. 3tes Cor.
2. } — — — — 11. 32. 4tes Cor.
3. }
4. — — — — 11, 32. 5tes Cor.
5. — — — — 11, 32. 6tes Cor.
6. — — — — 11, 31.
7. — — — — 11, 33, Anm.

Verzeichniſs

der Sätze, welche man zu verſtehen nöthig hat, um alle in dieſem Buche gegebenen Probleme auflöſsen zu können.

1ſtes Buch der Aufgaben.

1ſtes Problem } iſt aufgelöſst wegen des 3ten Poſtu-
2. — — } lates der Aufgaben 1, Ap. 6.
Aufgaben.
3. — — — 1, 11. 4. C.
4. No. 1. — 1, 11. 4. C.
N. 2. — 5, 5.
5. — — — 1, 12. 3. C.
6. — — — 1, 12. 3. C.
7. — — — 1, 12. 3. C.

8. No. 1. — 1, 20. C. oder 4. 1.
No. 2. — 4, 2.
9. — — — 4, 1. C.
10. — — — 4, 1. C.
11. — — — 4, 2. 1. C.
12. — — — 2, 7. 5. C.
13. — — — 5, 13. 2. C.
14. — — — 5, 12. 3. C.
15. }
16. } — — 4, 2. 1. C.
17. }
18. }
19. } — 4, 12. 3. C. oder 5, 5. und 4, 12. 1. C.
20. }
21. — — — 4, 2.
22. — — — 4, 2.

2tes Buch der Aufgaben.

1ſtes Problem kann aufgelöſst werden nach 1, 12. 3. C.
2. — — — — 1, 11, 2. C.
3. — — — — 1, 12. 1. C.
4. — — — — 1, 12. 3. C.

3tes Buch der Aufgaben.

1ſtes Problem nach 1, 15.
2. — — — }
3. — — — } 1. Ap. 6.
4. — — — 1, 19. 2 C.
5. — — — }
6. — — — } 5, 5.
7. — — — 1, 19. 2 Cor.
8. — — — 5, 5.
9. — — — 5, 4. 6. C.

10.

10.	No. 1.	—	5, 13. 2. C.
	No. 2.	—	2. 10. 4. C.
11. } 12. }		— —	2, 1. 6. C.
13.	No. 1.	— — —	2, 1. 6. C.
	No. 2.	— — —	4, 7. 4. C.
14.	No. 1.	— — —	2, 1. 6. C.
	No. 2.	— — —	4, 7. 4. C.
15.	No. 1.	— — —	2, 1. 6. Cor.
	No. 2.	— — —	4, 7. 8. C. No. 8.
	No. 3.	— — —	5, 12. 1. C.
16. } 17. } 18.*) }		— — — —	2, 1. 6. C.
19.		— — — —	5, 12. 3. C.
20.	No. 1. } No. 2. }	— — —	4, 6.
21.		— — — — —	4, 7. 3. C.
22.		— — — — —	4, 6.
23. } 24. }		— — — —	2, 1. 3. C.
25.		— — — — —	2, 7. 5. C.
26.		— — — — —	5, 5.
27.		— — — — —	2, 7. oder 5, 5.
28. *a*)		— — — —	2, 7.
28. *b*)		— — — —	2, 1. 6. C.
29.		— — — — —	4, 14.
30. } 31. } 32. } 33. } 34. }		— — — —	4, 15.

— Corol-

*) Vergl. 2, 20. [Der Uebers.

— Corollarium — — — — , 12. 3. C.
35. — — — — — 4, 20.

4tes Buch der Aufgaben.

1ſtes Problem No. 1. iſt aufgelöſst wegen	5, 6. C.
No. 2. —	5, 5.
2. — — —	5, 6. C.
3. 4. — — —	5, 11. 1 C.
5. — — —	5, 9.
6. — — —	5, 9,
7. — — —	5, 4. 5. C.
8. — — —	5. 4. 3. C.
9. — — —	5. 4. 3. C.
10. — — —	(4, 2. C.*) od. 5, 6. C.
11. 12. 13. 14. 15. 16. — — —	5, 7.
17. 18. 19. — — —	5, 15.

5tes

*) Dieſer Satz iſt nicht richtig angeführt. Vergl. auch 5. 2.

Der Ueberſ.

5tes Buch der Aufgaben.

1fte Aufgabe ift aufgelöfst wegen					6, 4. 2te Anm. *)
2.	—	—	—	—	6, 4, und (6, 21. 5. C.) **)
3.	—	—	—	—	6, 4. ***)
4.	—	—	—	—	6, 4. Cor.
5. *	—	—	—	—	6, 4. * Cor.
6.	—	—	—	—	6, 4. xx)
7.	—	—	—	—	6, 4. und 6, 21. 1 C.
8. 9. 10.		—	—	—	6, 7.
11.	No. 1.	—	—		6, 10. C.
	No. 2.	—	—		6. 14. 3. C.
12.	—	—	—	—	6, 10. C. und 6, 21. 1 C.
13. 14.		—	—	—	6, 5.
15.	—	—	—	—	6, 8. 2. C.
16.	—	—	—	—	6, 12. 1. C.
17.	—	—	—	—	6, 21. 1. C.
18.	—	—	—	—	6, 12. 2. C.

*) Und 5, 9.

Der Ueb.

**) Wegen 6, 4. u. 6, 2, 2, 11, 1, 1.

***) Vergl. 6, 8. 2. * 5, 2. Cor. Ich bemerke hier überhaupt, dafs auch mehrere folgende Citationen von denen, die in diefem 5ten Buche der Aufgaben angegeben find, verfchieden find.

xx) 1, 8. und 5, 5.

Er-

Erklärung der Zeichen, deren ſich die Mathematiker bedienen:

$=$ *bezeichnet Gleichheit*: $A = B$ heiſst A *gleich*. B.

$>$ — — *größer*: $A > B$ heiſst A *größer* als B.

$<$ — — *kleiner*: $A < B$ heiſst A *kleiner* als B. Einige gebrauchen das Zeichen $\sqsubset$ anſtatt des $>$ und $\sqsupset$ anſtatt des $<$.

$+$ — — *plus* oder *Summe*: $A + B$ das heiſst A *plus* B oder *die Summe* von A und B.

$-$ — — *minus* $A - B$ das heiſst A *minus* B oder B *abgezogen* von A.

$\times$ oder $.$ — *Multiplication*: $A \times B$ oder $A.\,B$ bezeichnet A *multiplicirt* mit B; und $(C + D).\,E.$ *bezeichnet* die Summe von $C + D$ mit E multiplicirt.

$\frac{A}{B}$ — — *Diviſion* $\frac{A}{B}$ heiſst A *dividirt* durch B.

$\perp$ — — *ſenkrecht*: $A \perp B$ das heiſst A *ſenkrecht* auf B.

$\parallel$ — — *parallel*: $A \parallel B$ heiſst A *parallel* mit B.

$\angle$ — — *Winkel*.

$\triangle$ — — Dreieck.

▭ -- -- *Rechteck*.

$\square$ -- -- *Quadrat*.

$\backsim$ -- -- *ähnlich*: $\backsim$ A iſt der B *ähnlich*.

$:$ -- -- *Verhältniſs*: $A:B$ *bezeichnet die Verhältniſs* von A zu B. Dieſs wird auch durch Diviſion und alſo durch $\frac{A}{B}$ ausgedrückt.

Ein-

Einleitung.

1.

Die Meſskunde iſt derjenige Theil der Mathematik, der die Eigenſchaften der Ausdehnung (Ausbreitung) unterſucht, und ſie durch gewiſſe Schlüſſe beweiſst.

2.

Sowohl die Ausdehnung und ihre drei Dimenſionen, Länge, Breite und Dicke, als die Figuren, die daraus entſtehen, ſind der Gegenſtand der Meſskunde.

3.

Bloſs durch Abſtraction des Verſtandes trennt man dieſe drei Dimenſionen von den Körpern ſelbſt ab, um ſie beſonders betrachten zu können.

4.

Der Gegenſtand der Meſskunde iſt daher ein abgezogener und ſehr einfacher Begriff.

D'Alembert *Melanges*, T. 4. p. 158-60.

5.

Man iſt der Einfachheit des Gegenſtandes, den Elementen, welche die Geometer annehmen, und der Art, auf welche ſie weiterſchreiten, die Evidenz der Meſskunde ſchuldig.

D'Alembert *Melanges*. T. 4. p. 164.

6.

Die Elemente, woraus die Mathematiker ihre Beweiſe nehmen, ſind die Definitionen der Gegenſtände ſelbſt, welche ſie betrachten: wozu Einige etliche allgemeine Wahrheiten fügen, welche ſo deutlich ſind, daſs Niemand von geſundem Verſtande daran zweifeln kann. Dieſe werden *Axiomata* genannt; als:

1. Zwo Gröſsen, die einer und derſelben gleich ſind, ſind unter einander gleich.

2. Der Theil iſt kleiner, als das Ganze.

3. Alle Theile machen zuſammen das Ganze aus.

4. Wenn man gleiche Gröſsen zu gleichen Gröſsen fügt, oder von denſelben abzieht; ſo

ſo ſind die Summen oder die Unterſchiede auch gleich.

7.

Die Mathematiker bedienen ſich zwoer Arten von Beweiſen: des *direkten Beweiſes* und der *Beweiſe aus dem Ungereimten.*

Ein Beweis, welcher *direkt* geführt wird, beſteht darin, daſs man, durch eine an einander gekettete Schluſsfolge aus den einmal angenommenen Elementen dasjenige, was bewieſsen werden muſs, ableitet.

8.

Die Beweiſse aus dem Ungereimten beſtehen darin, daſs man beweiſse, daſs eine Sache wahr iſt, weil ſie nicht falſch ſein kann; das heiſst, weil, wenn man annimmt, daſs ſie falſch, und daher das Gegentheil wahr ſei, man in Ungereimtheiten verfällt.

D'Alembert Melanges, T. 4. P. 166. man trift ſchon ein Beiſpiel von dieſen Beweiſen in I, 1, 2tes C.

9.

Man wendet in dieſen beyden Arten von Beweiſsen beſtändig den Grundſatz der *Aufeinanderlegung (ſuperpoſitio),* und *Uebereinſtimmung (congruentia)* an. Man ſtellt ſich nemlich vor, daſs eine Figur dergeſtalt auf eine andere gelegt ſei, daſs einige

ge der Theile der zuerst genannten mit einigen der zuletzt genannten übereinstimmen, oder auf dieselbe fallen: und man folgert daraus, ob alle andere Theile der zuerst genannten Figur auf alle andere Theile der zuletztgenannten fallen, und folglich ob die beiden Figuren ganz mit einander übereinstimmen, und folglich unter einander gleich seien, oder nicht.

D'Alembert Melanges, P. 165. 166. Dieser Grundsatz ist der ursprüngliche Grundsatz der Gleichheit. s. das 1ste Buch 6te Definition 3te Anmerk. 3te Seite und schon in dem 8ten Satze desselben ein Beispiel dieser Art von Beweisen.

Anfangs-

Anfangsgründe

der

Meſskunde.

Erſtes Buch.

Ueber die allgemeinen Eigenſchaften der geraden Linien, ſo wohl an ſich ſelbſt betrachtet, als in ſo fern ſie die Winkel der Dreiecke und Vierecke bilden, oder derſelben Seiten ſind.

Definitionen.

1.

W*enn man die Ausdehnung allein in Beziehung auf ihre Länge betrachtet, auf die* B r e i t e *und* D i c k e *nicht Acht gibt, ſondern dieſe beyde abzieht; ſo bekömmt man den Begrif einer* L i n i e.

Anmerkung. Hiervon die gewöhnliche Art, auf welche die Mathematiker sich ausdrücken, daſs *die Linie eine Länge ohne Breite oder Dicke sey.* AB, CDE. Fig. 1.

Eucl. I. 2te Def. — W. g. *) §. 2. — St. p. 2. d. 2.

2.

Die Endungen der Linien, und die Schnitte, die sie unter einander machen, werden Punkte genannt.

1ste *Anmerkung.* Davon die gewöhnliche Art zu sprechen, deren sich die Mathematiker bedienen, *daß die Punkte keine Theile haben.* A, B. Fig. 1. A, B, C, D, E. Fig. 2.

Eucl. I. 1 und 3te Def. — W. g. §. 2. — St. p. 2. d. 2.

2te *Anmerkung.* Einige betrachten die Linie, als sey sie aus einem ununterbrochenen Fortrücken eines Punktes entstanden; wenn man will, als das *Muſs* oder den *Weg*, den ein bewegter *Punkt* nach sich lassen müſste.

3.

Eine gerade Linie ist eine solche Linie, die zwischen ihren Punkten überall gleich gelegen ist, Fig. 1. AB. *eine krumme Linie, die zwischen denselben ungleich gelegen ist.* CDE.

1ste

*) Nach der Quart-Ausgabe des lat. Werks: *Elementa Matheseos Universae* auctore Chr. Wolfio. MDCCXXX. 10. et seqq. Der Ueb.

1ste *Anmerkung.* Andere sagen, eine gerade Linie sey diejenige, welche zwischen zween Punkten die kürzeste ist. Wir werden in der Anmerkung zu dem 15ten Satze sehen, ob diese Bestimmung gut sei.

Eucl. I. 4te Def. — W. g. §. 8. *)

2te *Anmerkung.* Es ist mit dieser Definition beschaffen, wie mit allen Definitionen der Dinge, die zu einfach sind, als daſs sie mit Worten erklärt werden können: sie sind alle sehr unvollkommen, und sehr dunkel. Der Herr d' Alembert hat sich hierüber in seinen Melanges *de Philosophie* im 4ten Th. S. 163. und S. 164. im 5ten Th. S. 203-206. vorzüglich schön erklärt.

4.

Man nennt Oberfläche *einen Raum, welchen man allein in Beziehung auf die Länge und Breite betrachtet, indem man auf die* Dicke *nicht achtet, sondern dieselbe abzieht, wie* ABDA Fig. 3. ABDE 4te Fig.

1ste *Anmerkung.* Daher die Art, auf welche sich die Mathematiker ausdrücken, daſs eine Oberfläche allein *Länge* und *Breite*, jedoch keine *Dicke* habe.

Eucl. I. 5te Def. — St. p. 2. 3 Def.

*) Nach der vorigen Ausgabe §. 17. Der Ueb.

Corollarium. Die Endungen einer Oberfläche ſind Linien: entweder krumme, oder gerade Linien.

2te Anmerkung. Einige betrachten die Oberfläche als wäre ſie aus dem ununterbrochenen Fortrücken einer Linie entſtanden, gleichſam als das *Muſs* oder den *Weg*, den eine Linie, bei ihrer Bewegung nachlaſse.

5.

Eine Ebene, oder ebene Fläche oder platte Fläche, iſt eine ſolche Fläche, die zwiſchen ihren Endungen überall gleich liegt.

Eucl. I. 7te Defin.

1ſte Anm. Andere beſtimmen *die Ebene* ſo: eine Oberfläche, die eine gerade Linie in allen ihren Theilen berühren kann: auf welche eine gerade Linie ganz paſst und ſchlieſst.

S. Clavius zu der 7ten Def. des 1ſten Buches *Euklids.* — St. p. 3. 6. Def.

2te Anm. Wir ſind hier abermalen in dem Falle, wovon wir in der 2ten Anmerkung unſerer 3ten Definition Meldung gethan haben.

6. 5te Fig.

Die wechſelsweiſe Neigung zwoer Linien (AB *und* EB, *oder* GF *und* KF,) *die in der nemlichen Ebene liegen, und verlängert werden, biſs ſie einander in irgend einem Punkte* (B *oder* F) *ſchneiden, wird ein*

ein ebener Winkel genannt. Dieser Winkel ist geradlinigt, wenn die Linien, die denselben ausmachen, gerade sind.

Der Punkt (B oder F) wo die beyden Linien einander begegnen, oder wo sie sich schneiden, wird der Scheitel oder die Spitze des Winkels genannt: die Linien selbst (BA, BE, *oder* GF, KF,) *heissen die Schenkel des Winkels.*

Eucl. I. 8te und 9te Def. — W. g. §§. 16, 17. *) — St. p. 5. 13te Def.

1ste Anmerkung. Wenn ein Winkel mit Buchstaben ausgedruckt wird, braucht man drey, oder *einen* Buchstaben. Wenn man *einen* braucht, ist er immer der Buchstabe, der an der Spitze steht; wenn man drey braucht; so setzt man immer den Buchstaben von der Spitze in die Mitte: folglich werden die Winkel in Fig. 5. entweder ABE, GFK, oder wohl allein B und F genannt.

2te Anmerkung. Da der Winkel allein die Neigung zwoer Linien ist; so folgt, dass die Grösse des Winkels allein nach der Grösse dieser Neigung und gar nicht nach der Länge seiner *Schenkel* beurtheilt werden muss. Die Schenkel mögen lang oder kurz sein, sie mögen mehr oder weniger verlängert werden, ihre Neigung, und folglich der Winkel, welchen sie machen, bleibt der nemliche: daher

*) In der gemeldten Ausgabe §. 54.

ist DBH der nemliche Winkel, welcher ABE ist.

3*te Anmerkung*. Mau beurtheilt die Gleichheit zweener Winkel aus ihrer Uebereinstimmung. Sie sind nemlich gleich, wenn, unter der angenommenen Bedingung, daſs die beyden Spitzen auf einander, und *ein* Schenkel des einen Winkels längst einem Schenkel des andern gelegt sind, der zweyte Schenkel des zuerst genannten, mit dem zweyten Shenkel des zuletzt genannten übereinstimmt, und folglich die nemliche Neigung hat. Wenn dies nicht statt findet; so wird der Winkel, dessen zweyter Schenkel ausserhalb des zweyten Schenkels des anderen fällt, am gröſten sein. Dies ist der ursprüngliche Begriff und das natürliche Maaſs von der Gleichheit oder Ungleichheit zweyer Winkel. Das *Winkelmaaſs* der Zimmerleute beruht auf dieſem Grundſatze. Darauf bauen die Mathematiker alles, was ſie von der Gleichheit und Ungleichheit verſchiedener Winkel beweiſen.

H. g. §§ 13. 14. 15.

4*te Anmerkung*. Es giebt, welche wollen, daſs man in der Vergleichung zweener Winkel auf folgende Art verfahre: daſs man nemlich von den Schenkeln gleiche Theile, BI, KB, LF, MF abſchneide; und mit denſelben als Radiis, aus den Spitzen B und F, Cirkelbögen IK, LM beſchreibe: und daſs man alsdann nach der Gleichheit oder Ungleichheit der Räume IBK, LFM über die Gleichheit oder

Un-

Ungleichheit der Winkel urtheile. S. D'Alembert. Melanges 5ter Th. 207te S. und 38ste S. — St. 5te S. 14te Def. Doch man muſs mit dem Begriffe eines Winkels, der allein in der Neigung zwoer Linien besteht, den eines Raums, welcher zwischen dreien Linien enthalten ist, nicht verwirren. Wir werden zwar in dem ersten und zweyten Satze unseres 8ten Buches beweiſsen, daſs die Cirkelbögen ein natürliches Maaſs für Winkel an die Hand geben: doch ich zweifle, daſs dieses Element wohl als ein erstes Element betrachtet werden kann.

7.

Wenn eine Linie (D B Fig. 6.) *dergestalt auf eine andere* (A C) *fällt, daſs sie auf beyden Seiten des Punkts der Einfallung* (B) *gleiche Winkel* (A B D *und* C B D) *macht; so werden diese Winkel rechte Winkel genannt: und von der einfallenden Linie selbst wird gesagt, daſs sie auf der andern senkrecht stehe, oder eine senkrechte, oder perpendikulare Linie seie. Ein Winkel* (E B C) *der gröſser, als ein rechter Winkel ist, wird ein stumpfer und der* (E B A), *welcher kleiner ist, ein spitziger Winkel genannt.*

Eucl. I. 10. 11. 12te Def. — W. g. §. 20. *) — St. p. 6, 15, 16, 17. Def.

8. Fig. 7.

Man sagt von zwoen Linien (A D, G E, *daſs sie parallel oder gleich weit von einander seyen, wenn*

*) Wolf. g. §§ 65. 66.

wenn sie in Rücksicht auf eine dritte Linie, welche sie schneidet, eine und dieselbe Neigung haben: das heisst auf derselben Seite (nach der 3ten Anmerkung zu der 6ten Definition) gleiche Winkel mit dieser Linie machen, (namentlich < ABF = < GFK: < ABC = < GFC.) —

1ste Anmerkung. Es ist nicht leicht, einen wahren und einfachen Begriff von den parallelen Linien zu geben; man hat darüber ganze Bände geschrieben: doch man kann mit den *Melanges D'Alembert* 5 Th. S. 202. zufrieden sein, wenn man den *Taquet* und *Clavius* in ihren Erklärungen zu der 36sten Definition des ersten Buchs *Euklids* zu Rathe zieht. Ich habe diejenige Definition gegeben, welche mir die einfachste und richtigste schien, und Gelegenheit giebt, alle Eigenschaften der parallelen Linien — bloss durch sie selbst zu beweissen, und ohne jene aus einigen Eigenschaften der Dreiecke ableiten zu müssen, wie *Euklid* gethan hat.

2te Anmerkung. *Euklid* giebt folgende Definition von den parallelen Linien: sie sind Linien, welche in der nemlichen Ebne liegen, und, ins Unendliche verlängert, einander niemals schneiden.“ Ich zweifle, ob der Begriff von *Verlängerung ins Unendliche*, und von *niemals schneiden*, für ein *Element* deutlich genug sei: wir werden in dem Corollarium des 6ten Satzes beweisen, dass diese Eigenschaft, dass sie sich niemals schneiden, auch aus unserer Definition der parallelen Linien folge. *Euklid* I. — 35ste Def.

Ande-

Andere geben diese Definition: „parallele Linien sind die, welche beständig gleich weit von einander entfernt sind, d. h. die von der Art sind, daſs alle senkrechte Linien (BL, CK, DI Fig. 8.) welche dazwischen gezogen werden, gleich seyen. Wir werden in dem 2ten Corollarium unseres 9ten Satzes beweiſsen, daſs dies auch aus unserer Definition folge; doch zugleich in der Anmerkung zu unserem 14ten Satze bemerken lassen, daſs diese Bestimmung nicht gebraucht werden könne, wenn man nicht zuvor bewieſsen habe, oder annehme, daſs der Abstand eines Punktes von einer geraden Linie, durch die senkrechte Linie gemessen werden müſse. W. g. §. 25. *) — St. p. 29. Def. 27ste.

9.

Eine Figur ist ein Raum, der zwischen geraden (Fig. 4.) *oder krummen Linien* (Fig. 3.) *eingeschlossen ist. Sie ist geradlinig, wenn sie von geraden Linien eingeschlossen ist.*

Eucl. l. 14. und 20ste Def. — St. 3. S. 7te Def. 19te S. 18te Def.

10.

Die geradliniche Figuren sind dreylinicht, vierlinicht, fünflinicht, und s. w. nach der Zahl Linien, welche sie einschliessen: doch meistens wird die Benennung von der Zahl der Winkel genommen:

*) Oder vielleicht lieber für den deutschen Leser. §. 81.

men: und man nennt sie Dreiecke, Vierecke, Fünfecke u. s. w. je nachdem sie drey, vier, fünf oder mehr Winkel haben, und folglich aus so vielen Linien bestehen.

Eucl. I. 20. 21. 22. 23. DD.

11. Figg. 9. 10. 11.

Man nennt ein Dreieck (ABC) *gleichseitig, wenn die drei Linien oder Seiten* (AB, BC, AC) *woraus es besteht, einander gleich sind.* — *Man nennt es gleichschenklicht* (DEF), *wenn zwo Seiten* (DE, EF) *einander gleich sind, und ungleichseitig* (GHI), *wenn die drey Seiten* (GH, HI, IG.) *ungleich sind.*

Eucl. I. 24ste. 25ste. 26ste. DD. — W. g. §. 21. *) — St. 19te S. 20. 21. 22. DD.

1ste Anmerkung. Man nennt eine der Seiten, (AC, oder DF oder GI) eines Dreiecks durchgängig seine *Base* oder *Grundlinie*, und alsdann hat der Winkel (B, oder E, oder H) welcher dieser Base gegenüber steht, den Nahmen *Spitze*, *Scheitelpunkt* des Triangels (Dreiecks). Man nimmt in dem gleichschenklichen Dreiecke (DEF) die Seite (DF), die den andern ungleich ist, für *Grundlinie*: und alsdann werden die beyden gleichen Seiten (DE, EF) die *Schenkel* des Dreiecks genannt.

2te

*) W. §§. 88. 89.

2te *Anmerkung.* Diese Erklärung und die zwo folgenden sind nur *Wort-Erklärungen* oder Auslegungen des Worts, da sie allein zu verstehen geben, was diese Worte bezeichnen, im Fall die Figuren möglich sind. Doch wir werden in der Folge, ehe wir von den Figuren handeln, beweisen, dass sie in der That existiren können.

12. — 12te. 13te. 9te Figg.

Man nennt ein Dreieck (LMK), *das einen rechten Winkel* (M) *hat, ein rechtwinkliches Dreieck: man nennt es stumpfwinklich, wenn es* (wie NPO) *einen stumpfen Winkel hat. Wenn alle drei Winkel spitzig sind, so heisst das Dreieck ein spizwinkliches Dreieck* (ABC) *wenn das Dreieck* (LMK) *rechtwinklich ist, so nennt man die Seite* (LK) *die dem rechten Winkel gegenüber steht, die Queer-Seite oder Hypothenuse, und die beyden andern Seiten* (LM. MK), *die den rechten Winkel* (M) *umfassen, die Seiten des rechten Winkels.*

Eucl. I. 27ste. 28ste. 29. DD. — W. g. §. 21. *) St. 20ste. S. 23ste. 24ste. 25ste. DD.

Anm. Es wird aus dem 2ten *Corrollarium* unseres 7ten *Satzes* erhellen, warum wir, wenn wir von *rechtwinklichen* oder *stumpfwinklichen* Dreiecken sprechen, nur von einem *rechten* oder von einem *stumpfen* Winkel gesprochen haben,

13.

*) § 91 — vel § 94 — § 96.

13.

Ein Viereck hat verschiedene Benennungen, namentlich: die Benennung von Quadrat, wenn die vier Seiten (AB, BC, CD, DA — Fig. 14.) *einander gleich, und die vier Winkel* (A, B, C, D) *zugleich rechte Winkel sind. Die Benennung von Raute (Rhombus) wenn die vier Seiten* (FG, GH, HI, FI, Fig. 15.) *zwar gleich, die Winkel aber keine rechte Winkel sind.*

Die Benennung von Rautenartiger Figur oder länglicher Raute (Rhomboides), wenn die gegenliegenden Seiten (KL *und* MI LM *und* KI. 16 *Fig.*) *gleich sind, und auch die gegenüberliegenden Winkel;* (K *und* M), (L *und* I) *gleich doch keine rechten Winkel sind.*

Die Benennung von Parallelogramm, wenn die gegenübergelegten Seiten (KL *und* MI, LM *und* KI Fig. 16.) *parallel sind; doch wenn in einem Parallelogramm* (AB DE 4te Fig.) *die vier Winkel* (A, B, D, E) *über dies rechte Winkel sind; so erhält das Parallelogram die Benennung von rechtwinklichem Parallelogram oder blos von Rechtecke; Alle andere viereckichte Figuren, wobey die Seiten und Winkel ungleich sind,* (OPQN- 17te Fig.), *werden ungleichseitige Vierecke oder Trapezia genannt.*

Man nennt in allen diesen Figuren, die Linien (DB, *oder* GI *oder* LI, *oder* PN) *die von dem einen Winkel zu dem gegenüberliegenden geht, die Diagonale,*

gonale, *d. h. die Linie*, *welche die Winkel schneidet.*

Eucl. I. 30 - 34 Def. — W. g. §. 22.*) — St. 43ste S. 29ste 30ste DD. 49ste S. 32ste Def.

Anm. Das Wort *Parallelogramm* bezeichnet im Griechischen eine Figur, welche aus *parallelen* Linien zusammengesetzt ist. Doch wir werden in unserm 19ten Satze beweisen, daſs alle *Parallelogramme* in der That *Rautenartige Figuren* (*länglichte Rauten*) sind, indem die gegenüberstehenden Seiten, wie auch die gegenüberliegenden Winkel, gleich sind.

14. 3te Fig.

Ein Cirkel ist eine ebne Figur, welche von einer einzigen krummen Linie eingeschlossen ist; diese Linie wird der Umkreis (Umfang) genannt: dieser Umkreis ist so beschaffen, daſs alle die Linien (AC, BC, DC) *die man aus allen seinen Punkten zu einem und demselben Punkte,* (C) *der innerhalb des Umkreisses sich befindet, und in welchem sie daher zusammenlaufen, ziehet, gleich sind. Dieser Punkt* (C) *wird der Mittelpunkt oder das Centrum; und die erstgenannten Linien* (AC, BC, DC) *werden Radii oder Strahlen (Halbmesser) genannt. Die krumme Linie* (ABD) *selbst führt den Namen: Umkreiſs des Cirkels.*

Eucl. I. 15te, 16te Def. — W. g. §§. 12. 13. 14.— St. 3te S. 9te Def.

Anmerk.

*) W. Ed. in quart. §. 97 - 103. incl.

*) §. 37. in der ang. Ausgabe.

Anmerk. Der ganze Cirkel ist also eine Figur; und der ganze Umkreis kann nicht beschrieben werden, ohne dass eine Figur entsteht, weil der Umkreis eine krumme Linie ist, die in sich selbst zurückkehrt. Aber die Theile des Umkreises, *Bögen* genannt, (CDE Fig. 1.) sind keine Figuren.

Allgemeine Suppositionen, (Postulata, Forderungen.)

1.

Man nimmt an, dass es möglich sey, eine gerade Linie von einem Punkt zu einem andern zu ziehen.

Eucl. I. 1stes Post. — St. 16te S. 1stes Post.

2.

Man nimmt an, dass es möglich sey, eine gerade Linie zu verlängern, entweder so weit man will, oder bis sie einer gegebenen Linie gleich sey, oder grösser als eine gegebene Linie werde.

Eucl. I. 2 Post. — St. p. 16te S. 2tes u. 3tes Post.

Anmerk. Wir werden in dem 1sten Problem unseres 1sten Buchs der Probleme zeigen, wie man aus einem bestimmten Punkte eine gerade Linie, die einer andern gegebenen Linie gleich sey, ziehen könne.

3.

3.

Man nimmt an, daſs man von einer geraden Linie ein Stück, welches einer gegebenen, die jedoch kleiner als die gerade Linie iſt, gleich ſey, nehmen könne.

Anm. Wir werden in dem 2ten Probleme unſeres 1ſten Buchs der Probleme ſehen, wie dies geſchehe.

4.

Man nimmt an, daſs aus einem gegebenen Punkte eine Linie, die entweder auf einer andern ſenkrecht ſteht, oder parallel mit derſelben iſt, gezogen werden könne.

Anm. Wir werden in dem 3ten und 6ten Probleme unſeres erſten Buches zeigen, wie man dies bewerkſtellige.

5.

Man nimmt an, daſs es möglich ſey, aus einem beſtimmten Punkte als Mittelpunkte, und mit einem beſtimmten Radius, nach Belieben, einen Cirkel zu beſchreiben.

Eucl. I. 3 Poſt. — St. 16te S. 4tes Poſt.

Allgemeine Grundsätze, (Axiome).

1.

Gerade Linien, von welchen zween Punkte zusammentreffen, treffen ganz zusammen.

Eucl I. 12tes Axiom. — W. g. §. 41. *) — St. 14te S.

2.

Zwo gerade Linien, welche aus einem und demselben Punkte gezogen werden, oder einander schneiden, haben ausser dem Punkte, bei welchem sie sich treffen und welcher zu beyden Linien gehört, nichts gemeinschaftlich.

S. *Tacquet* und *Clavius* zu dem 14ten *Ax.* Euclids 1sten Bchs. — St. 14te S.

3.

Gerade Linien, deren zween äusserste Punkte zusammentreffen, und die daher ganz zusammentreffen (zusammenfallen) sind einander gleich; und umgekehrt: gerade Linien, die gleich sind, werden ganz mit einander zusammenfallen, wenn man ihre äusserste Punkte auf einander legt.

W. g. §. 42. **)

Anm.

*) §. 169. in der ang. Ausg.

**) Oder §. 170. in der ang. Ausg.

Anm. Von *diesem* einfachen Elemente werden alle Beweise, welche die Gleichheit der Linien betreffen, genommen.

4.

Wenn die Scheitel von zween gleichen Winkeln auf einander gelegt werden, und ein Schenkel eines Winkels längst einem Schenkel des anderen gelegt wird: so wird der zweyte Schenkel des ersten Winkels auch mit dem zweyten Schenkel des zweyten zusammenfallen. Und im Gegentheil, wenn die Scheitel und die Schenkel zweener Winkel zusammenfallen, so sind diese Winkel einander gleich.

Eucl. I. 8tes Ax. — W. g. §. 41. *)

Anm. S. 2te Anm. zu der 6ten Definition.

5.

Eine Linie, welche eine von zwoen parallelen Linien schneidet, wird auch die andere, wenn sie im nöthigen Falle verlängert wird, schneiden.

1ste Anm. Dies folgt aus der Definition von parallelen Linien selbst: s. die 8te Definition.

2te Anm. *Euklid* hat diesen Satz zwar nicht mit so vielen Worten ausgedrückt; jedoch hat Er denselben stillschweigend in der Construction zu dem 30 und 37sten Satze des ersten Buches

*) §§. 166. 167.

ches angenommen. S. die Anm. von *König*, zu dem 27sten S. des ersten Buchs *Euklids*. 43ste S.

6.

Wenn man aus den zweenen äussersten Punkten (A *und* B) *einer geraden Linie* (AB), *als aus zween Mittelpunkten, Cirkel ziehet, mit Radiis (Halbmessern), die entweder der Linie* (AB) *gleich oder grösser als diese Linie sind, so werden diese Cirkel einander schneiden* (*z. B. in* C.)

1*ste Anm.* *Euklid* hat dies nicht mit so vielen Worten ausgedruckt; jedoch bedient er sich dieses Satzes deutlich in der Operation zu dem 1sten, 2teu, 3ten *Satze* des ersten Buchs. — *Wolf* hat diesen Satz bewiesen, in s. lateinisch abgefaſsten Geometrie §. 197. Doch er ist so klar, als die Sonne, und gehört zu den Axiomen.

2*te Anm.* Wenn man eine Linie, die kleiner als AB wäre, zum Halbmesser annähme, so könnte es geschehen, daſs die Cirkel einander nicht schnitten, sondern nur berührten, oder auch, daſs sie einander nicht einmal berührten.

3*te Anm.* Vermittelst dieses Satzes und der 5ten Supposition, kann man das 1ste und 2te Problem des 1sten Buches, und das 2te und 3te des 3ten Buches unserer Probleme, auflösen.

1ste

1ste Abtheilung.

Ueber die geraden Linien an sich selbst betrachtet.

1ster Lehrsatz. 19*te Fig.*

Wenn eine gerade Linie (DC) *auf eine andere* (AE) *fällt, und sie in irgend einem Punkte* (C) *schneidet; so macht sie um diesen Punkt entweder zween rechte Winkel, oder zween Winkel* (ACD *und* DCE), *welche zweenen rechten Winkeln zusammen genommen gleich sind.*

Eucl. I. 13. — W. g. §. 57.*) — St. 16te S. 1sterS.

Construction. Diese bestehet darin, dass man nach der 4ten Supposition annehme, dass aus C eine Linie CB, die auf AE senkrecht stehe, gezogen sey.

Beweis. Dieser folgt aus der 7ten Definition und aus der Construction selbst.

1stes Corollarium.

Alle Winkel (ABE, EBD, DBC 6te Fig.), *welche um einen und denselben Punkt* (B) *und an derselben Seite irgend einer Linie* (AC) *von so vielen Linien* (EB, DB) *als man will, gebildet werden, sind zusammen genommen, immer zween rechten Winkeln gleich.*

*) §. 147. im lat. Werke.

2tes Corollarium. 20ste Fig.

Alle rechte Winkel sind einander gleich.

Beweis. Dieser wird aus der Ungereimtheit, in die man verfällt, wenn man das Gegentheil annimmt, genommen. Man behält die ursprüngliche Definition der rechten Winkel im Auge (7 Def.) und dann nimmt man an: 1stens, dass die Linie CB auf die Art auf AI falle, dass sie gleiche Winkel ABC und CBI mache, die daher rechte Winkel genannt werden: 2tens, dass die Linie GE dergestalt auf DF falle, dass sie gleiche Winkel DEG und GEF mache, die daher auch rechte Winkel genannt werden. Um hierauf zu beweisen, dass der rechte Winkel GEF dem rechten Winkel CBI gleich sey, supponirt man, dass C auf B, und EG längst CB gelegt werde; und man zeigt an, dass man sich einer Ungereimtheit aussetzt, wenn man supponirt, dass EF irgend anderswo als längst BI falle, z. B. dass sie BF werde: und diese Ungereimtheit wird aus diesem ersten Satze abgeleitet, nachdem man BI, an der anderen Seite der Linie AI bis nach D verlängert hat.

Anmerkung. *Euklid* hat diese Gleichheit der rechten Winkel als eine Sache, die sich von selbst versteht, angenommen: doch *Proclus* hat in seinen Anmm. zu diesem Schriftsteller mit Recht behauptet, dass die Sache bewiesen werden müsste. Man sehe ihn, wie auch den *Clavius* in ihren Anmerkungen zu dem 12ten Axiome des 1sten Buches Euklids.

3tes *Corollarium.*

Da nun alle rechte Winkel einander gleich ſind, und folglich eine beſtimmte und beſtändige Gröſse haben, ſo giebt dieſer Winkel ein natürliches Maaſs an, welches zum Beſtimmen der Gröſse aller andern Winkel wird dienen können.

H. g. §. 19.

2ter *Lehrſatz.*

6te Fig. Wobey es doch jetzt nicht nöthig iſt, daſs DB auf AC ſenkrecht ſey.

Wenn zwo gerade Linien (AB *und* BC) *einer dritten Linie* (DB) *in dem nemlichen Punkte* (B) *begegnen, ſo daſs ſie mit dieſer zween Winkel machen* (ABD *und* DBC), *welche zuſammen genommen, zween rechten Winkeln gleich ſind; ſo werden dieſe zwo gerade Linien* (AB, BC) *nur eine und dieſelbe gerade Linie* (AC) *ausmachen.*

Eucl. I. 14. — St. 17te S. 1ſter S. 3tes Coroll.

Beweis. Er wird aus der Ungereimtheit, der man ſich ausſetzt, wenn man das Gegentheil annimmt und darthut, daſs nicht AB nur die Verlängerung von BC ſey, und mit dieſer nur *eine* Linie AC ausmache, ſondern daſs EB zum Beiſpiele die Verlängerung von BC ſein ſollte, abgeleitet. Die Ungereimtheit erhellet aus dem 1ſten Satze.

Anm. Dieſer Satz iſt nur der umgekehrte des vorhergehenden.

3ter Lehrsatz 2te Fig.

Wenn zwo Linien (AB, CE) *einander in einem Punkte* (D) *schneiden, so werden die gegenüberstehenden Winkel oder* *S c h e i t e l w i n k e l*, *die um diesen Punkt* (D) *gebildet werden* (ADE *und* CDB *und* EDB), *einander gleich sein.*

Eucl. 1. 15. — W. g. §. 61. *) — St. 18te. S. 2ter Stz.

Beweis. Aus dem ersten Lehrsätze.

Anm. Dieser Satz scheint mir keines Beweisses nöthig zu haben, und unter die Elemente gesetzt werden zu müssen, da AD und DE nothwendig eine und dieselbe Neigung unter einander haben, als CD und DB, und daher einen gleich grossen Winkel machen.

Corollarium.

Alle Winkel, die um einen Punkt gemacht werden können, sind zusammen genommen immer vier rechten Winkeln gleich.

Eucl. 1. 15. Cor. — W. g. §. 63. *) St. 18te S. 2ter Stz. 1stes Cor.

4ter Lehrsatz.

Wenn eine gerade Linie (CK) *zwo parallele Linien* (AD *und* GE) *schneidet, so macht sie immer die über*

*) Im lat. Werk §. 156.

*) Oder § 159 nach der ang. Ausg.

über der Hand liegenden Winkel oder die Wechselswinkel (ABF *und* BFE: *oder* DBF *und* BFG *einander gleich und die zween innern Winkel* (ABF *und* BFG *oder* DBF *und* BFE), *die an derselben Seite liegen, zusammen zween rechten Winkeln gleich. Und umgekehrt: wenn eine Linie* (CK) *zwo andere* (AD, GE) *dergestalt schneidet, daſs entweder die Wechselswinkel* (ABF *und* BFE *oder* DBI *und* BFG) *gleich sind: oder die Summe der beiden inneren Winkeln* (ABF *und* BFG *oder* DBF *und* BFE) *an derselben Seite, zween rechten Winkeln gleich ist, so werden diese beyden geraden Linien* (AB, GE) *mit einander parallel sein.*

Eucl. 1' 29. 27. 28. — W. g. §§ 97. 98.*) St. 30stes 12 Stz. 32ste S. 3tes Cor.

Beweis. Für den ersten Theil durch den 3sten Lehrsatz, und die 8te Definition.

Für den zweeten Theil, durch den 1sten Lehrsatz, und die 8te Definition. Für den umgekehrten Satz: aus der Ungereimtheit, in die man fällt, wenn man das Gegentheil annimmt, nemlich, daſs AB und GE nicht parallel seyen, und daſs daher eine andere Linie, z. B. BK, mit GE parallel sei: und diese Ungereimtheit erhellet aus der Vergleichung dieser Supposition mit den gegebenen Bedingungen, und dem Bewiesenen im ersten Theile.

5ter Lehrsatz 21ste Fig.

Wenn zwo oder mehrere Linien (CD, EF) *einer und derselben Linie* (AB) *parallel sind; so sind sie auch mit einander parallel.*

Eucl.

*) § 233.

Eucl. I, 30. *)

Vorbereitung. Man zieht die Linie GL, welche die gegebene Linien ſchneidet.

Beweis. Aus dem 5ten Axiome, und der 8ten Definition.

6ter Satz 22ſte Fig.

Wenn die Linie CL, zwo Linien BG und IH dergeſtalt ſchneidet, daſs die innern Winkel (GDK und DKH) an derſelben Seite zuſammen kleiner als zween rechte Winkel ſind; ſo werden dieſe zwo Linien, (wenn ſie nöthigen Falls verlängert werden) nach dieſer Seite irgendwo (in F) einander ſchneiden.

Conſtruktion. Man nimmt (nach dem 4ten Poſtulat) an, daſs die Linie AE, welche durch den Punkt D gehet, mit IF parallel ſei.

Beweis. Aus dem 4ten Lehrſatze, und dem 5ten Axiome.

1ſte *Anm. Euklid* hat dieſen Satz unter die Axiome geſetzt; es iſt nemlich bei ihm das 11te: Doch es gehört nicht unter dieſe Claſſe: ſ. *König* über das 11te Axiom und den 27ſten Lehrſatz des erſten Buchs, und *Tacquet* über den 31ſten Satz. Herr *Montucla* vermuthet mit Recht, daſs dieſes Axiom, durch die Nachläſsig-

*) W. g. in der ang. Ausg. §. 232.

läſsigkeit der alten Copiſten, aus ſeinem wahren Platze weggerückt, und daſs es eine Folgerung des 28ſten Satzes wäre. (*Hiſtoire des Mathematiques* T. I. p. 221.) Auch wird dieſer Satz in einer alten Arabiſchen Handſchrift *Euklids*, welche zu Rom aufbewahrt wird, mit deutlichen Worten bewieſen.

Corollarium.

Parallele Linien ſchneiden einander niemals, ſo ſehr man ſie auch verlängert: und umgekehrt: zwo Linien, die einander niemals ſchneiden, ſind parallel.

Beweis. Aus dieſem Lehrſatze, verglichen mit dem 4ten, leitet man die Ungereimtheit ab, der man ſich ausſetzen würde, wenn man dies nicht annähme.

1*ſte Anm.* Die Definition *Euklids*, daſs zwo Linien, die einander niemals ſchneiden, parallel ſeyen, folgt daher auch aus der unſrigen.

2*te Anm.* Aus dieſem Lehrſatze folgt, daſs man aus den Endpunkten (D und K) einer geraden Linie DK, Linien DF, KF ziehen kann, die einander in einem Punkte F ſchneiden: und daher, daſs ein Dreieck möglich iſt. Es erhellt weiter, daſs ein Dreieck DFK auf ſeiner Grundlinie DK höchſtens nur *einen* rechten Winkel haben kann. Doch wir werden dies in dem zweyten Corollarium des 7ten Satzes allgemeiner beweiſen.

3*te*

3te Anm. Man würde auch aus diesem Lehrsatze, mit dem 4ten vereinigt, schliessen können, dass die drei Winkel eines Dreieckes, zusammen genommen, zweenen rechten Winkeln gleich sind; doch dies wird der Gegenstand des 7ten Lehrsatzes sein.

2te Abtheilung.

Ueber die Seiten und Winkel der Dreiecke, und Parallelogramme.

7ter Lehrsatz. 23ste Fig.

In allen Dreiecken, (ABC *z. B.*) *ist der äussere Winkel,* (BCE), *welchen eine der Seiten* (BC) *mit der verlängerten anliegenden Seite* (AC) *macht, immer der Summe der beiden gegenüberstehenden Winkel* (A *und* B) *gleich: und die drei Winkel sind zusammengenommen immer zweenen rechten gleich.*

Eucl. I. 32. — W. g. §. 101. *) — St. 32te S. 13ter Satz.

Bereitung. Man nimmt an, dass aus C eine Linie CD mit der Seite AB parallel gezogen sey.

Beweis. Für den ersten Theil aus dem 4ten Lehrsatze und der 8ten Definition.

Für den zweyten aus dem 1sten Satze, und dem ersten Theile.

*) In der lat. Ausgabe in 4. §. 188.

1stes Corollarium.

Es sind rechtwinkliche, und stumpfwinkliche Dreiecke möglich.

2tes Corollarium.

Ein Dreieck kann nicht mehr als einen rechten oder einen stumpfen Winkel haben.

S. die 3te Anm. zu dem 6ten Lehrsatze.

W. g. §§. 102. 103. *)

3tes Corollarium 25ste Fig.

Wenn die Summe zweener Winkel (A *und* B) *in einem Dreiecke* (ABC) *der Summe zweener Winkel* (D *und* E) *in einem andern Dreicke* (DEF) *diese Winkel mögen einander (namentlich* A *dem* D; B *dem* E) *gleich sein, oder nicht, gleich ist; so wird immer der dritte Winkel* (ACB) *in dem erstern Dreiecke* (ABC) *dem dritteu Winkel* (F) *im letztern Dreiecke* (DEF) *gleich sein und umgekehrt.*

W. g. §. 105 **) — St. 33ste S. 1. Cor.

4tes Corollarium.

Der äußere Winkel (BCE Fig. 23.) *ist immer größer, als einer der beiden gegenüberstehenden innern* (A *oder* B).

Eucl. 1. 16.

5tes

*) In der ang. Ausg. §§. 218. 221.

**) Ebendaselbst §. 246.

5tes Corollarium. 24*ste Fig.*

Wenn man aus einem gegebenen Punkte (B) *eine Linie* (BA) *nach Belieben auf eine andere Linie* ACE *und hierauf wieder aus demselben noch mehrere andere Linien* (BD, BC) *fallen läßt: so werden diese Linien an derselben Seite desto größere äußere Winkel* (BCE, BDE) *und desto kleinere innere* (BCA, BDA) *machen, je mehr sie von der ersten Linie abweichen.*

6tes Corollarium.

Wenn man aus dem Scheitel eines Dreiecks eine senkrechte Linie auf die Grundlinie fallen läßt, so wird diese (BD Fig. 26.) *innerhalb des Dreiecks, wenn die Winkel* (A *und* C) *an der Grundlinie* (AC) *beide spitzig sind: doch außerhalb des Dreiecks* (*so wie* CD Fig. 57.) *fallen, wenn einer der Winkel* (CAB) *an der Grundlinie* (BA) *stumpf ist.*

8ter Lehrsatz. 25*ste Fig.*

Wenn zwey Dreiecke (ABC *und* DEF) *so beschaffen sind, daß einer der Winkel* (B) *des erstern einem der Winkel* (E) *des letztern gleich ist, und daß beide Schenkel* (BA, BC) *des gedachten Winkels* (B) *in dem erstern Dreiecke den beiden Schenkeln* (DE, EF) *des gedachten Winkels* (E) *in dem letztern Dreiecke* (*namentlich* BA *dem* DE, BC *dem* EF) *unter einander gleich sind: so wird* 1*stens die dritte Seite* (AC) *der dritten Seite* (DF) *gleich sein;* 2*tens werden auch die Winkel, welche in den beiden Dreiecken gleichen Seiten gegenüber stehen,* (*namentlich* A *dem* D, ACB *dem* DFE) *gleich sein und* 3*tens die Dreiecke*

cke selbst, das heisst, die Räume, welche sie einschliessen, werden auch gleich gross sein.

Eucl. 1. 4. — W. g. §. 70. *) — St. 21ste S. 3ter S.

Beweis. Man nimmt an, dass man das Dreieck D E F z. B. dergestalt auf das Dreieck A B C lege, dass die Scheitel B und E, wie auch, dass die Seiten D E und A B auf einander zu liegen kommen: und man schliesst hierauf aus der 6ten Def. *3ten* Anm. und aus dem *4ten* und *3ten* Axiome, dass alle übrige Theile auch übereinstimmen, und daher gleich sind.

1ste Anm. Man kann den dritten Theil nicht umkehren und sagen: dass alle Dreiecke, die gleich seyen, das heisst, deren Räume gleich seyen, auch gleiche Winkel, und gleiche Seiten haben. Wir werden in dem 2ten Buche beweisen, dass viele Dreiecke in Rücksicht des Inhalts oder des Raums, welchen sie enthalten, gleich seyen, ohne dass Gleichheit von Winkeln oder Seiten Statt finde; das heisst, ohne dass sie in allen Hinsichten gleich seyen.

2te Anm. Die Suppositionen, worin dieser Satz Statt hat, sind *1stens* die gegenseitige Gleichheit zwoer Seiten in beiden Dreiecken, der einen mit der andern: und alsdann *2tens* die Gleichheit, nicht zwoer Winkel *überhaupt*, irgend

*) In der angef. Ausg. §. 179.

gend eines in jedem Dreiecke, sondern gerade derjenigen Winkel, welche zwischen den gleichen Seiten enthalten sind. Hier muss man gehörig Acht geben: wenn man die Gleichheit nicht von dem Winkel, der *zwischen* den gleichen Seiten enthalten ist, sondern von einem der Winkel, welcher in jedem Dreiecke einer der Seiten, die in Jedem gleich sind, *gegenüber* steht, voraus setzte; würde der Schluss nicht allgemein seyn, sondern nur für die rechtwinklichte Dreiecke überhaupt, und für die übrige in einem besondern Falle Statt haben; welche beide Sätze der Gegenstand des 11ten Lehrsatzes 6ten Corollariums und des 13ten Lehrsatzes sind.

3ter Lehrsatz. 25ste Fig.

Wenn zwey Dreiecke (ABC *und* DEF) *so beschaffen sind, daß eine Seite* (AC) *des einen, einer Seite* (DF) *des andern gleich ist: und daß zween Winkel des einen zween Winkeln des andern, der eine dem andern* (*z. B.* < BAC = < EDF; < ACB = < DFE) *gleich sind; so wird 1stens der dritte Winkel* B *dem dritten Winkel* E *gleich seyn; 2tens werden auch die übrigen Seiten diejenigen namentlich, welche gleichen Winkeln gegenüber liegen,* (*das heißt* AB = DE; BC = EF) *einander gleich seyn.*

Eucl. I. 26. — W. g. §. 71. *) St. 41ste S. 21sten Satz.

Be-

*) In der gemeldten Ausgabe §. 251.

Beweis. Für den ersten Theil aus dem 3ten Corollarium des 7ten Satzes.

Für den zweyten Theil, indem man annimmt, dass die Linie A C auf D F gelegt werde, und angiebt, dass, da der Winkel D dem A, und F dem A C B gleich ist, und daher die Linien D E und E F mit A B und B C zusammen fallen müssen, auch B A der D E gleich sein müsse, weil man, wenn dies nicht also wäre, und A G z. B. der D E als gleich vorausgesetzt würde, vermöge des 6ten Satzes in Ungereimtheiten verfallen würde. Man zieht daher die Linie C G zur Construction.

1stes Corollarium.

Das ganze Dreieck A B C *ist dem ganzen Dreieck* D E F *gleich: das heisst, die Räume, welche sie einschliessen, sind gleich gross.*

Anm. Die Anmerkung, die wir zu dem 8ten Satze gemacht haben, kann auch hier angewandt werden.

2tes Corollarium. 8te Fig.

Alle senkrechte Linien (B L, C K), *welche man zwischen zwoen parallelen Linien* (A F, M G) *ziehen kann, sind immer einander gleich: und umgekehrt, wenn alle senkrechten Linien, die zwischen zwoen Linien gezogen werden können, einander gleich sind, so sind die gedachten Linien parallel.*

Beweis. Er wird aus diesem Lehrsatze und dem 4ten genommen, nachdem man die Linie BK gezogen hat.

Anm. Man siehet daher, wie aus unserer Definition der Parallellinien auch die folgt, welche einige Schriftsteller geben, dass nemlich diejenigen Linien, die so beschaffen seyen, dass die senkrechte Linien, die zwischen denselben enthalten sind, gleich seyen, auch parallel seyen.

10ter Lehrsatz. 26te und 27te Fig.

Wenn in einem Dreiecke (ACB) *die Winkel* (A *und* C) *auf der Grundlinie gleich sind, so ist dieses Dreieck ein gleichschenklichtes Dreieck, (das heisst* AB = BC.)

Eucl. I. 6. — St. 36ste L. Cor.

Erster Beweis. 26ste Fig. Man setzt voraus, dass BD aus B auf AC senkrecht falle: und der Beweis wird aus dem *5ten Lehrsatze* genommen.

Zweyter Beweis. 27ste Fig. Dies ist der Beweis, welchen *Euklid* gegeben hat. Man verlängert die Schenkel BA und BC, macht AE = CF, und zieht AF, CE: der Beweis folgt alsdenn aus dem 7ten Lehrsatze, dessen 3ten Corollarium, der gegebenen Voraussetzung, und dem 8ten und 9ten Lehrsatze.

1stes Corollarium.

Es sind gleichwinkliche Dreiecke möglich, das heisst, Dreiecke, worin alle drei Winkel gleich sind.

2tes Corollarium.

Ein gleichwinkliches Dreieck ist immer gleichseitig.

W. §. 111. *)

11ter Lehrsatz. 26ste, 27ste Fig.

In einem gleichschenklichen Dreiecke (ABC) *sind immer die Winkel* (A, C) *auf der Grundlinie einander gleich; ebenfalls sind es, wenn die Schenkel verlängert werden, die Winkel* (EAC *und* ACF) *unter der Grundlinie.*

Eucl. I. 5. — W. g. §. 107. **) — St. 22ste S. 4ter Satz.

Erster Beweis. 26ste Fig. Man setzt voraus, dass die Linie BD den Scheitel ABC in zween gleiche Theile ABD, und DBC schneide und dann folgt der Beweis aus dem 8ten Lehrsatze.

Zweyter Beweis. 27ste Fig. Diesen Beweis hat Euklides gegeben. Die Construction besteht

 darin,

*) In der ang. Ausg. der umgekehrte Fall, §. 186. u. der wirkliche Fall §. 254.

**) Eben das. zum Theil zwar nur §. 184.

darin, daſs man A E und C F als gleich annimmt, und die Linien A F und C E zieht: den Beweis nimmt man hierauf aus dem 8ten und 9ten Lehrſatze.

1ſtes Corollarium. 25ſte Fig.

Wenn eine Linie B A *mit einer andern Linie* A C *einen ſpitzen Winkel* (B A C) *macht; ſo wird man aus dem andern Endpunkte* C *dieſer zwoten Linie* A C *keine Linie ziehen können, die mit derſelben einen Winkel mache, welcher dem erſteren und die zugleich der erſteren Linie* B A *gleich ſey, ausgenommen ſie begegne dieſer in dem Endpunkte* B.

Beweis. Der Beweis wird aus dem 10ten Satze geführt wegen der Ungereimtheit, die man begehet, wenn man annimmt, daſs B C der Linie A B irgend anderswo, z. B. in G begegne.

2tes Corollarium.

Ein gleichſeitiges Dreieck iſt immer gleichwinklich: und jeder Winkel iſt ein Zwei-Drittheil eines rechten Winkels.

W. g. §. 108. *) — St. 23ſte S. 3tes Cor.

Der letzte Theil wird vermittelſt dieſes und des 7ten Lehrſatzes geſchloſsen. Man kann nun das 2te Problem des 2ten Buches auflöſsen.

*) Eb. daſ. §. 187.

3tes Corollarium.

Ein gleichschenkliches Dreieck kann nur in dem Scheitel einen rechten Winkel haben.

Der Beweis wird aus diesem Lehrsatze und dem 2ten Corollarium des 7ten Lehrsatzes abgeleitet.

4tes Corollarium. 26ste Fig.

Eine lothrechte Linie (BD), *welche man aus dem Scheitel eines gleichschenklichten oder gleichseitigen Dreiecks* (ABC) *auf die Grundlinie* (AC) *gefällt hat, schneidet diese Linie in zween gleiche Theile (*AD *und* DC) *und theilet den Scheitel* (ABC) *ebenfalls in zween gleiche Winkel.*

Und im Gegentheil: diejenige Linie, welche aus dem Scheitel eines gleichschenklichen oder gleichseitigen Dreiecks (ABC) *niedergefällt wird, und entweder den Scheitel, oder diese Grundlinie in zween gleiche Theile theilet, steht lothrecht auf der Grundlinie* AC.

Tacquet zu der 26sten Proposition *Euklids* 1stem Buche. *) — W. g. §. 101. **) — St. 23ste Seite, 1stes und 2tes Corollarium.

Beweis. Er wird mit diesem Lehrsatze, in Verbindung des 9ten geführt.

*) Ich gestehe, dass ich dieses Citatum in der Ausgabe Tacquets: Ed. sec. corr. Antverpiae apud Jac. Meursium, Anno MDCLXV. am angeführten Platze nicht finde.

**) In der ang. Ausg. §. 184.

Anm. Man kann nun die Auflösung des 3ten Problems und die erste Auflösung des 4ten Problems aus dem ersten Buche der Probleme zu Stande bringen.

5tes Corollarium. 132ste Fig.

Wenn auf derselben Grundlinie (A C) *zween verschiedene gleichschenkliche Dreiecke* A B C *und* A G C *stehen; so wird die Linie* (B G), *welche durch die Scheitel* (B *und* G) *der beyden Dreiecke gehet, bis auf die Grundlinie* (A C) *zu* E *verlängert, diese Grundlinie in zween gleiche Theile schneiden, und auf derselben lothrecht stehen.*

Beweis. Er wird aus diesem Lehrsatze in Verbindung mit dem 9ten in Anwendung derselben auf die Dreiecke A B G und G B C, genommen: man beweisst nemlich die Gleichheit der Winkel A B G und G B C: wodurch die Linie B G E in den Fall des 4ten Corollariums kömmt.

6tes Corollarium. 26ste Fig.

Zwey rechtwinkliche Dreiecke (A B D, B D C) *in welchen die Hypothenusen* (A B, B C) *einander und auch eine der Seiten des rechten Winkels* (B D) *in beyden Dreiecken gleich ist, sind in allen Rücksichten gleich.*

W. §. 96. *) — St. 28ste S. 11ter S.

Be-

*) Ebend. §. 235.

Beweis. Man legt die Dreiecke mit der Seite des rechten Winkels BD, welche in beyden gleich ist, an einander: dann machen AD und CD eine gerade Linie (2ter Lehrsatz): und das Uebrige wird von diesem Lehrsatze, und seinem 4ten Corollarium abgeleitet.

7tes Corollarium. 27ste Fig.

Wenn man aus dem Scheitel B *auf den Schenkeln* AB, BC *eines gleichschenklichen Dreiecks, oder auf ihren Verlängerungen, gleiche Theile,* (*z. B.* BE, BF) *abschneidet; so wird die Linie* (EF), *welche die Endpunkte* (E, F) *dieser Linien verbindet, mit diesen Linien einen gleichschenklichen Triangel* (BEF) *machen, wovon die Winkel unter einander denen des gegebenen Triangels* (ABC) *gleich sein werden, und dessen Grundlinie* (EF) *mit der Grundlinie* (AB) *des gegebenen Triangels parallel seyn wird.*

Beweis. Er folgt aus diesem Lehrsatze, aus dem 3ten Corollarium des 7ten Satzes und der 8ten Definition.

8tes Corollarium. 165ste Fig.

Wenn man aus einem der Winkel C *an der Grundlinie eines gleichschenklichen Dreiecks* AGC, *auf die gegenüberstehende Seite, welche im Nothfall verlängert worden sey, eine Linie* CD, *die einem der Schenkel gleich sey, fallen läßt; so wird der Winkel* DCE, *welchen diese Linie mit der verlängerten Grundlinie* AC *macht, das Dreifache des Winkels an der Grundlinie* GCA *oder* GAC *seyn.*

1ste Anm. Es erhellet, dafs drei Fälle möglich sind: Entweder fällt D bey G vorbey, so wie in der 165sten Figur, oder zwischen G und A, oder auf die andere Seite neben A; dann fällt folglich CD unter AC, und der Winkel, welchen DC mit CE macht, oder DCE wird gröfser, als zween rechte Winkel. Man kann noch für die Figuren einen vierten Fall hinzufügen, wenn namentlich D auf A fällt; doch dies ist ein Zeichen, dafs der Triangel AGC nicht nur gleichschenklich, sondern auch gleichseitig ist: alsdann fällt CD auf CA und die Linien DC, CE machen *eine* gerade Linie aus; und daher, wenn man will, einen Winkel, der zweenen rechten Winkeln gleich und der auch in der That das Dreifache des Winkels in dem gleichseitigen Dreiecke ist.

2te Anm. Wir werden in dem Corollarium des 8ten Lehrsatzes im 8ten Buche zeigen, welchen Einfluſs dieses auf das berühmte Problem *der Vertheilung eines Winkels in drei gleiche Theile* habe.

12ter Lehrsatz. 20ste Fig.

Wenn jede der drei Seiten eines Dreiecks (ABC) *einer besondern Seite eines andern Dreiecks* (DEF) *gleich ist;* (*namentlich* AB *der* DE, AC *der* DF, CB *der* FE); *so werden auch die Winkel, die den gleichen Seiten gegenüberstehen, gleich seyn,* (*namentlich* < BAC = < EDF; < ABC = < DEF; < ACB = < DFE.

Eucl.

Eucl. I. 8. — W. g. §. 72. *) — St. p. 24. 5ter S.

Beweis. Wird aus der Ungereimtheit geschlossen, die man begeht, indem man annimmt, dass, wenn DF auf AC gelegt werde, die Linie DE nicht auf AB fallen, und daher der Winkel FDE nicht dem BAC gleich seyn, sondern die Linie DE entweder innerhalb des Winkels BAC, oder ausserhalb desselben, fallen würde, die Ungereimtheit wird aus dem 11ten Lehrsatze abgeleitet, wenn man AG=AB zu seyn voraussetzt und BG ziehet.

1ste Anm. Dieser Satz kann auch direkt bewiesen werden: indem man, wie in der 133sten Fig. geschehen ist, die beyden Dreiecke einander auf derselben Grundlinie AC gegenüber stellt: und dann BG ziehet. Man gebraucht im Beweise den 11ten und 8ten Satz.

1stes Corollarium.

Die beyden Dreiecke sind einander gleich; das heisst, die Räume, welche sie einschliessen, sind gleich gross.

2te Anm. Man gebe auf dasjenige Acht, was wir in der Anmerkung zum 8ten Lehrsatze gesagt haben.

3te Anm. Man kann jetzt das dritte Problem des 2ten Buches auflösen.

2tes

*) In der oft genannten Ausgabe Wolfs §. 204.

2tes Corollarium.

Aus dem Beweise, dessen in der 1sten Anmerkung Erwähnung gethan worden ist, erhellet, daß die Winkel um E *rechte Winkel sind. Wenn man daher zwey Dreiecke* ABC *und* AGC, *worin jede der drei Seiten in dem einen Dreiecke einer besondern Seite im andern gleich ist, dergestalt gegen einander stellt, daß eine der Seiten* (AC) *beiden gemeinschaftlich werde, und die gleichen Winkel* (BAC *und* GAC; BCA *und* GCA) *an derselben Seite oben und unten gelegt werden; so wird die Linie, welche die Scheitel der beyden Dreiecke verbindet, auf der gemeinschaftlichen Grundlinie* AC *lothrecht stehen, und durch sie in zween gleiche Theile getheilt werden.*

3tes Corollarium.

*In der Figur *) sind* BCG *und* BAG *gleichschenkliche Dreiecke, deren gemeinschaftliche Grundlinie* BG *ist; und wenn man daher auf dieselbe Grundlinie* BG *auf verschiedenen Seiten zwey gleichschenkliche gleiche oder ungleiche Dreiecke legt; so wird die Linie, welche ihre Scheitel verbindet, auf der Grundlinie senkrecht stehen, und sie, wie auch die Scheitel, in zween gleiche Theile theilen.*

4te Anm. Hierdurch werden das 5te, 6te 7te Problem des 1sten Buches, und das 1ste und 4te des 2ten Buches aufgelößt.

5te

*) Der Hr. Vf. meint hier ohne Zweifel die 133ste Figur zur linken Seite.

5te Anm. Die Vergleichung dieses 3ten Corollariums mit dem 5ten Corollarium des vorhergehenden Lehrsatzes lehrt uns, daſs dieselbe Eigenschaft Statt findet, die gleichschenkliche Dreicke mögen beyde über, oder beyde unter die Grundlinie gelegt werden.

13ter Lehrsatz. 134ste 135ste *Fig.*

Wenn in zweyen Dreiecken (A B C *und* D E F) *zwo Seiten des einen zwoen Seiten des andern* (A B = D E; B C = E F) *gegenseitig gleich sind, und ein Winkel* (z. B. A.) *der einer der gegebenen Seiten* (B C) *gegenüberliegt, dem Winkel* (B), *der in dem andern Dreiecke der gleichen Seite* (E F) *gegenüber liegt, gleich ist; so werden diese Dreiecke in allen Rücksichten gleich seyn, wenn die Winkel* (C *und* F), *welche in diesen Dreiecken der andern gegebenen gleichen Seite gegen über liegen, beide entweder stumpf, oder spitzig sind.*

Construction. Man nehme an, daſs die Linien B G und E H aus den Winkeln B und E, welche zwischen den gegebenen Seiten (A B und B C, D E und E F) enthalten sind, gezogen und auf den gegenüberstehenden Seiten A C und D F lothrecht seyn.

Beweis. Aus der Gleichheit der Dreiecke A B G und D E H vermöge des 9ten Lehrsatzes, und hierauf *der* der Dreiecke B G C und E H F vermöge des 6ten Corollariums des 11ten Lehrsatzes.

Anm. Der Grund, warum verlangt wird, daſs in beiden Triangeln der Winkel, welcher der

zwoten

zwoten gegebenen Seite gegenübersteht, entweder spitzig oder stumpf sey, besteht darin, dass die Gleichheit von A C und D F von *der* von A G mit D H, und G C mit H F abgeleitet wird, und dass man allein wegen der genannten Voraussetzung, dass beide C und F stumpf, oder beide spitzig sind, entweder weist, dass D F der Unterschied von D H und H F ist, wenn A C" der Unterschied von A G und G C ist, oder die Summe von D H und H F ist, wenn A C von A G und G C (s. 6tes Cor. des 7ten Satzes) Summe ist.

Corollarium.

Alle rechtwinkliche, wie auch alle stumpfwinkliche Dreiecke, worin die stumpfe Winkel gleich sind, sind gleich, wenn zwo Seiten, welche um einen der spitzigen Winkel liegen, gleich sind.

14ter Lehrsatz. 24ste Fig.

In allen Dreiecken (z. B. A B C) *steht immer der größte Winkel* (A B C) *der grösten Seite* (A C), *und die gröste Seite* (A C) *dem grösten Winkel* A B C *gegenüber.*

Eucl. I. 18. 19. — St. 36ste S. 14ter S.

1ster Theil. Construction. Nehme A D = A B. Ziehe B D.

Beweis. Mit dem 11ten Lehrsatze: und dem 4ten Cor. des 7ten Lehrsatzes.

2ter

2ter Theil. Wird aus der Ungereimtheit, die man begehet, wenn man AC der AB gleich, oder kleiner als AB annimmt, bewiesen: man bedient sich für die erste Voraussetzung des 11ten Lehrsatzes, für die zwote des Beweises im 1sten Theile.

1stes Corollarium. 57ste Fig.

Unter allen Linien (CB, CA, CD), *welche man aus einem gegebenen Punkte* (C) *auf eine andere Linie* (AB) *fallen lassen kann, ist die Perpendikularlinie* (CD) *die kleinste; die übrigen sind desto kleiner, je näher sie der Perpendikularlinie liegen* (CA < CB)*: aus diesem Punkte kann nicht mehr als e i n e Perpendikularlinie gezogen werden: und es können nicht mehr als zwo Linien* (AB *und* BC, s. die 26ste Fig.) *die einander gleich seyn, gezogen werden. Diese werden auf beyden Seiten mit der Perpendikularlinie gleiche Winkel machen, und von derselben gleich weit abstehen.*

Tacquet zu dem 32sten Lehrsatze des 1sten Buchs Euklids 14tes Cor. *) — St. 53ste S. 2tes 3tes Cor.

Beweis. Den ersten und zweyten Theil folgert man unmittelbar aus diesem Satze: und der dritte wird mit Hülfe des 2ten Cor. des 7ten Lehrsatzes: und der 4te mit Hülfe des 9ten Lehrsatzes, daraus abgeleitet.

2tes Corollarium.

Da die Perpendikularlinie die kürzeste unter den Linien ist; so hat sie eine bestimmte Grösse und giebt daher

*) In der ang. Ausgabe von Tacquets Elementis Geometriae gehört hieher auch Cor. 15.

daher ein natürliches Maafs an die Hand, um den Abstand eines Punkts zu einer geraden Linie zu bestimmen.

St. 29ste S. 26ste Def.

1ste Anm. Die Definition, welche Einige von den Parallellinien gegeben haben: dafs es nemlich diejenigen Linien seyen, welche immer den nemlichen Abstand von einander haben, kann, ehe dieses Corollarium bewiessen ist, nicht angenommen werden.

3tes Corollarium. 63ste Fig.

Wenn man aus einem Punkte (A) *eine Hypothenuse* (AH) *auf eine andere Linie* (GK) *gezogen hat; so kann man an einer und derselben Seite dieser Linie* (AH) *keine zwo Linien* (AI, AK) *ziehen, welche grösser, als die genannten und zugleich einander gleich seyen: doch kann man an derselben Seite wohl zwo Linien* (AD, AB) *ziehen, welche beyde kleiner, als die genannte gegebene Linie, und dennoch einander gleich seyn werden: die eine wird alsdann an die eine, die andere an die andere Seite der Perpendikulärlinie fallen: die eine wird mit der Grundlinie, nach der Seite der gegebenen Linie* (AM) *einen stumpfen Winkel* (ADH), *die andere einen spitzigen Winkel* (ABH) *machen.*

2te Anmerk. Aus diesem Grunde geben einige Schriftsteller anstatt der Bedingung, unter welcher wir gesagt haben, dafs der 13te Lehrsatz statt finde, folgende an: „wenn die Seiten

(BC

(BC und EF s. 134ste, 135ste Fig.) welche den gleichen Winkeln (A und D) gegenüberstehen, grösser als die anstossende (AB, DE) sind; doch alsdann ist der Satz zwar in diesem besondern Falle wahr, allein er ist nicht überhaupt falsch, wenn diese Bedingung fehlt, und das Gegentheil Statt findet: denn die Dreiecke können gleich seyn, wenn auch die gegenüberstehende Seiten kleiner, als die angränzenden sind; jedoch müssen sie beyde entweder stumpfe oder spitzige Winkel mit der dritten Seite machen; deswegen haben wir den 13ten Lehrsatz lieber auf die Art, als wir gethan haben, ausgedrückt.

Karsten §. 83 und §. 87.

15ter Lehrsatz. 30ste Fig.

In allen Dreiecken (ABC) *sind zwo Seiten* (AB, BC) *nach Belieben zusammen genommen, immer grösser als die dritte* (AC).

Eucl. I. 20 — St. 36ster S. 15ter S.

Construktion. Man nimmt an; dass CB dergestalt verlängert sey, dass DB = AB sey; man zieht AD.

Beweis. Mit dem 11ten und 14ten Lehrsatze.

1ste Anm. Die Definition, welche Einige von der geraden Linie geben: dass sie die kürzeste zwischen zweenen Punkten sey, kann nicht an-

D gewandt

gewandt werden, wenn dieser Satz nicht zuvor bewiesen ist.

2te *Anm.* Man ist im Stande, die 1ste Aufgabe des 3ten Buches aufzulösen.

16ter Lehrsatz. 31ste Fig.

Wenn man aus den Endpunkten (A *und* C) *einer Seite in einem Dreiecke* (ABC) *zwo Linien* (AD, CD) *nach einem und demselben Punkte* (D) *innerhalb des Dreiecks ziehet; so werden diese zwo Linien zusammen genommen kleiner, als die beyden übrigen Seiten* (AB, BC) *des Dreiecks zusammengenommen seyn: sie werden aber einen größern Winkel* (ADC) *als diese einen Winkel* (ABC) *einschließen.*

Eucl. I. 21. — St. 37ste S. 16ter S.

Construction. Man zieht BD biss E, und verlängert AD biss F.

Beweis. Für den ersten Theil, mit dem 15ten Lehrsatze.

Für den zweyten mit dem 4ten Corollarium des 7ten Lehrsatzes.

1ste *Anm.* Man kann auch auf die Linie BDE Verzicht thun; und bloss aus den verglichenen Dreiecken ADC und AFC, AFC und ABC Schlüsse machen.

1ste *Anm.* Wenn man den Punkt (D) auf einer der Seiten (z. B. in F.) nimmt so hat man

nur

nur *eine* Linie von dem einen Endpunkte (A) zu ziehen, und der Lehrsatz behält auch in diesem Falle sein Ansehen.

*17ter Lehrsatz. 24ste * Fig.*

Wenn in zweyen Dreiecken (A B C, D E F) *zwo Seiten des einen* (A B, B C) *zween Seiten* (D E, E F) *des andern, unter einander gleich sind, doch jene einen größern Winkel* (A B C), *als diese einen* (D E F) *einschließen; so wird auch die dritte Seite* (A C) *des ersteren Dreiecks* (A B C) *größer, als die dritte Seite* (DF) *des letzteren Dreieckes seyn.*

Eucl. I. 24. — St. 40ste S. 20ster S.

Construktion. Man macht den Winkel D E G = A B C; die Seite E G = B C, und zieht D G, F G.

Beweis. Mit Hülfe des 8ten, 11ten und 14ten Lehrsatzes beweist man die Gleichheit der Seiten D G und A C, der Winkel E G F und E F G, und daſs daher < D F G gröſser als < D G F, und D G gröſser, als D F ist.

18ter Lehrsatz. 32ste Fig.

Wenn zwo Linien (A B *und* C D) *einander gleich und dazu parallel sind; so werden die Linien* (A C *und* B D), *welche sie verbinden, ebenfalls einander gleich und parallel seyn.*

Eucl. I. 33. — St. 42ste S. 22ster S.

Construction. Man zieht eine Linie (CB), die aus einem der Winkel (C) nach dem gegenüberstehenden (B) gehet.

Beweis. Man folgert aus dem 4ten und 8ten Lehrsatze, daſs die Dreiecke (ABC und CBD) *in allen Rücksichten* gleich und (AC und BD) gleich und parallel seyen.

19ter Lehrsatz ebenfalls die 32ste Fig.

In einem Parallelogramme (ABDC) *sind immer die gegenüberliegenden Seiten* (AB *und* CD, AC *und* BD) *einander gleich, die gegenüberliegenden Winkel* (A *und* D, ABD *und* ACD) *sind es auch: und das ganze Parallelogramm wird durch die Diagonale in zween gleiche Theile* (ACB *und* CBD) *geschnitten.*

Eucl. I. 34. — St. pp. 43 S. 23ster S.

Beweis. Vermittelst des 4ten und 9ten Lehrsatzes zeigt man, daſs die Dreiecke ACB und CBD in allen Rücksichten gleich seyen.

1stes Corollarium.

Ein Dreieck (CBD) *ist die Hälfte eines Parallelogramms* (ABDC) *welches auf derselben Grundlinie* (CD) *und zwischen denselben Parallellinien dergestalt liegt, daſs es einen Winkel* (D) *mit dem Dreiecke gemeinschaftlich hat.*

1ste Anm. In dem 6ten Coroll. des *1sten* Lehrsatzes vom *2ten* Buche werden wir zeigen, daſs

daſs dies auch Statt habe, wenn der Winkel (D) in dem Parallelogramm von dem im Dreiecke auch verschieden iſt.

2tes *Corollarium.*

Wenn zwo neben einander liegende Seiten eines Parallelogramms gleich ſind; ſo werden ſie alle vier gleich ſeyn; und man bekömmt eine Raute. Wenn überdies ein Winkel ein rechter Winkel iſt; ſo ſind alle Winkel deſſelben rechte Winkel, und man hat ein Quadrat. Wenn die neben einander liegenden Seiten ungleich ſind, doch einen rechten Winkel machen; ſo hat man ein rechtwinkliches Parallelogramm oder ein Rechteck (3*te Def.*)

2*te Anm.* Man kann nun die 4te und 7te Aufgabe des 3ten Buchs aufloſen.

3tes *Corollarium.*

In allen Vierecken, worin die gegenüberliegenden Seiten (AB *und* CD, AC *und* BD) *gleich ſind, ſind dieſelbe auch parallel: und die gegenüberliegenden Winkel ſind gleich.*

Beweis. Man nimmt an, daſs die Diagonale (CB) gezogen ſey: und man fährt vermöge des 12*ten* Lehrſatzes fort, und bedient ſich endlich des 4*ten.*

4tes *Corollarium.*

Wenn man aus einem Punkte G *der Diagonale, die Linien* FGI *und* HGE *mit den Seiten parallel ziebet;*

het; so wird das Parallelogramm (ABDC) *in vier Parallelogramme getheilt, und diejenigen zwey* (AG *und* GD), *durch welche die Diagonale nicht geht, und welche man Ergänzungen nennt, werden einander gleich seyn.*

Eucl. I. 43. — St. p. 48. def. 31. p. 49. pr. 30.

5tes Corollarium

Die beyden Diagonalen (KM, LI) *eines Parallelogramms schneiden einander in zween gleiche Theile.*

Beweis. Aus der Gleichheit der Dreiecke LBM und KBI, LBK und MBI.

20ster Lehrsatz. 137ste *Fig.*

Wenn aus dreien Punkten (I. B. F.) *welche auf einer der Seiten* (AD) *eines Dreiecks* (ADE) *in gleicher Entfernung* (IB, BF) *von einander liegen, drei Linien* (INP, BC, FL) *mit der Grundlinie parallel gezogen werden; so werden diejenigen Theile* (NC, CL) *der andern Seite* (AE), *die zwischen diesen Linien enthalten sind, auch einander gleich sein. Und im Gegentheil, wenn zwo Parallellinien* (BC, FL) *die Seiten eines Dreiecks* (ADE) *schneiden, und eine dritte Linie* (IN) *von jeder ein Stück* (BI *und* CN) *abschneidet, welches dem Stücke* (BF, CL) *einer jeden von ihnen, welches zwischen den erstgenannten Linien enthalten ist gleich ist; so ist diese dritte Linie mit den zween ersten parallel.*

Simpson I. 27.

Construktion. Man nimmt an, dass die Linie PO durch C mit AD parallel gezogen ist und die verlängerte Linie IN, und die FL, in P und O schneidet.

Beweis. Aus dem 19ten Lehrsatze schliesst man die Gleichheit der Linien CP und CO; und aus dem 3*ten* und 9*ten* die der Linien CN und CL. — Der zweyte Theil erhellet vermittelst des ersten aus der Betrachtung der Ungereimtheit, der man sich bloss stellt, wenn man das Gegentheil annimmt.

Corollarium.

Wenn man die Seite eines Dreiecks in so viele gleiche Theile, als man will, theilt und aus jedem der gleich weit von einander abliegenden Theilungspunkte eine Parallellinie mit der Grundlinie ziehet; so werden solche Linien die andere Seite in gleich viele Theile schneiden.

Anm. Dadurch kann man die 8te Aufgabe des 1sten Buchs auflösen.

21*ter Lehrsatz.* 138*ste Fig.*

Wenn man die vier Seiten irgend eines Vierecks (DCBA) *in zween gleiche Theile theilt; so werden die Linien* (HG, GF, FE, EH), *welche die Punkte, worin die Theilung geschehen ist, vereinigen, immer ein Parallelogramm machen.*

Simpson. I. 29.

Construktion. Man ziehet die Diagonalen BD, AC.

Beweis. Man schliesst aus dem 20sten Lehrsatze, dass GH und EF mit AC, und EH und FG mit BD parallel seyen: woraus der Satz mit Hülfe des 5ten Lehrsatzes folgt.

Zweytes Buch.

Ueber den Inhalt der geradlinichten Figuren.

1ste Abtheilung.

Ueber die Dreiecke und Parallelogramme.

Erste Classe von Definitionen.

1ste Definition. 56*ste Fig.*

Die Höhe (CD) *irgend einer Figur* (ACB) *ist die lothrechte Linie* (CD), *die von dem Scheitel* (C) *auf die Grundlinie* (AB) *fällt; oder wenn die Figur so beschaffen ist* (s. die 68ste Fig.), *daſs die Seite* (AB), *welche der Grundlinie* (CD) *gegenüber liegt, mit derselben parallel ist; so ist sie das Loth* (ED), *welches von dieser Seite auf die Grundlinie gezogen wird: und der Inhalt einer Figur ist der Raum, welcher zwischen den Linien, aus welchen die Figur besteht, eingeschlossen ist.*

 Für

Für den ersten Theil: Eucl. 6, 4 Def. — St. p. 244. def. 4.

1*ste Anm.* Die Ursache, warum die genannte lothrechte Linie die Höhe einer Figur genannt wird, erhellet aus dem 2ten Cor. des 14ten Lehrsatzes des 1sten Buches.

1*stes Corollarium.*

Zwo Figuren, welche zwischen den nemlichen parallelen Linien enthalten sind, sind gleich hoch: (Aus dieser Definition und dem 2ten Corollarium des 9ten Lehrsatzes des 1sten Buchs.)

2*tes Corollarium.*

Man sagt von zwo Figuren, dass sie gleich seyn, wenn der Inhalt beyder gleich ist.

2*te Anm.* Wenn überdies die Seiten und Winkel der einen Figur den Seiten und Winkeln der andern Figur (wie dies z. B. in dem 8ten, 9ten und 12ten Lehrsatze des 1sten Buches Statt fand) unter einander gleich sind; so sind diese Figuren nicht nur in Beziehung des Inhalts, sondern auch *in aller Rücksicht*, einander gleich.

2*te Def.* 49*ste Fig.*

Man sagt von einem Rechtecke (EFGH) *dass es das Rechteck aus zwoen bestimmten Linien* (AB *und* CD) *sey, wenn seine Grundlinie* (GH) *einer dieser*

dieser Linien (*z. B.* AB) *und seine Höhe* (EG) *der andern Linie* (CD) *gleich ist.*

Eucl. 2, 1ste Def. — St. p. 74. 1ste Def.

1ste Anm. Wir werden Gelegenheit haben, im 8ten Corollarium des 7ten *Lehrsatzes* aus dem 4ten Buche, den Grund, worauf diese Definition beruhet, anzugeben.

Corollarium. 51ste Fig.

Das Quadrat (ACEG), *welches auf eine Linie* (EG) *gelegt wird, ist ein Rechteck, das aus zwoen gleichen Linien* (EG *und* CE) *gemacht ist.*

2te Anm. Man zeigt oft ein Rechteck vermittelst dreier Buchstaben an, welche einen der Winkel bestimmen: man sagt, zum Beispiel, das Rechteck EGH, um das Rechteck aus GH, und EG anzuzeigen. Bei vielen, besonders alten Mathematikern, und denen, welche ihrer Schreibart genau folgen, werden auch drei Buchstaben einer Linie, welche man hintereinander stellt, das Rechteck aus zwoen Linien, welche man durch diese Bucstaben ausdrückt, anzeigen: z. B. 54ste Fig. *Rechteck* AHI; das heisst: Rechteck aus AH und HI: der mittlere Buchstabe ist derjenige, welcher in Verbindung mit dem ersten und dem letzten die Linien, die die Seiten des Rechtecks seyn werden, angiebt. Hievon kömmt nun der Ausdruck der Alten: *das, was zwischen zwoen Linien eingeschlossen ist*, um das Rechteck, welches man aus denselben bildet, auszudrücken.

1ster

1ter Lehrsatz 50ste Fig.

Die Parallelogramme (BL, DL, DH), *die auf derselben Grundlinie* (ML) *oder auf gleichen Grundlinien* (ML *und* IH) *stehen, und zwischen dieselben Parallellinien* (AF, HM) *gelegt und daher gleich hoch sind, sind von gleichem Inhalte oder sind gleich.*

1ste Anm. Der Grund der Schlußfolge: *und daher* u. s. w., welche im Satze selbst vorkömmt, erhellet aus dem 1sten Corollarium von der 1sten Definition dieses Buches.

Eucl. I, 35. 36. — W. g. §§. 152, 153. *) — St. p. 44. pr. 24. 25.

Beweis. Vermittelst der Definition von Parallellinien (8te Def. des 1sten Buchs) und des 8ten Lehrsatzes eben dieses Buchs, beweist man zuerst die Gleichheit der Dreiecke BDM und CEL, woraus das Uebrige folgt.

1stes Corollarium.

Ein Parallelogramm (CM) *ist dem Rechtecke* (LO) *gleich, das eine und dieselbe Grundlinie* (LM) *oder eine diesen gleiche Base hat, und dessen zwote Seite* (MO) *um den rechten Winkel der Höhe* (MO *oder* LP) *des Parallelogramms gleich ist; demnach ist ein Rechteck das natürliche Maaß der Parallelogramme.*

2tes

*) W. g. in der ang. Ausg. §. 383.

2tes *Corollarium.*

Alle Rechtecke, die aus gleichen Linien gemacht werden, sind gleich.

3tes *Corollarium.* 52ste *Fig.*

Die Summe verschiedener Rechtecke (IL, HQ, GP) *die eine und dieselbe Höhe, doch verschiedene Grundlinien haben, ist einem Rechtecke* (GL) *gleich, dessen Höhe die nemliche ist, und dessen Grundlinie die Summe aller dieser gegebenen Grundlinien ist.*

Eucl. 2, 1. — St. p. 75. pr. 1.

2te *Anm.* Es erhellet von selbst, dass dieses Corollarium eben so wohl für den Unterschied verschiedener Rechtecke, als für ihre Summe gilt, und dass man dasselbe daher im Allgemeinen, wenn man nach der 52sten Fig. IH = HG annimmt, ausdrücken konnte: die Summe (GL) oder der Unterschied (IL) verschiedener Rechtecke (HL, GP), welche eine und dieselbe Höhe, jedoch verschiedene Grundlinien haben, ist einem Rechtecke (GL oder IL) gleich, dessen Höhe dieselbe, und dessen Grundlinie die Summe (GK = HK + GH) oder der Unterschied (IK = HK — HI = HK — GH), der gegebenen Grundlinien ist.

4tes *Corollarium.* 57ste *Fig.*

Und daher ist das Quadrat (AE) *einer Linie* (EG) *der Summe der Rechtecke* (AF, BE), *aus der ganzen*

ganzen Linie und jedem ihrer Theile, in welche die Linie getheilt ist, insbesondere gleich.

Eucl. 2, 2. — St. p. 76. pr. 2.

5tes Corollarium. 51ste Fig.

Und wenn daher eine Linie (EG) *in zween Theile* (FG, EF) *getheilt ist; so ist das Rechteck aus dieser ganzen Linie* (EG) *und einem der Theile* (EF), *dem Quadrate* (EI), *welches auf diesem Theile beschrieben ist und dem Rechteck* (FH) *der beiden Theile* (FG, EF) *zusammen genommen gleich.*

Eucl. 2, 3. — St. p. 77. pr. 3.

6tes Corollarium. 50ste Fig.

Ein Parallelogramm (EM, BL *oder* EI) *ist immer das Doppelte eines Dreiecks, das auf einer und derselben Grundlinie steht, und dieselbe Höhe hat, oder zwischen denselben Parallellinien enthalten ist.*

Eucl. I. 47. — W. §. 154. *) — St. p. 47. pr. 28.

3te *Anm.* Wenn man dieses Corollarium mit dem 1sten Corollarium des 19ten Lehrsatzes im 1sten Buche vergleicht; so wird man sehen, daſs dasjenige, was wir damals als richtig bewiesen haben, wenn das Dreieck und das Parallelogramm einen gemeinschaftlichen Winkel haben, nun auf alle Dreiecke, so verschieden auch

*) In der angef. Ausg. §. 386.

auch ihre Winkel von denen der Parallelogrammen seyn mögen, angewandt wird.

4te Anm. Man ist, vermöge dieses Corollariums, im Stande, die 11te, 12te, 13te (1ste Auflösung), 14te (1ste Auflösung), 15te (1ste Auflösung), 16te, 17te, 18te, 23ste, 24ste, 28ste Aufgaben des 3ten Buches aufzulösen.

2ter Lehrsatz 51ste Fig.

Wenn eine Linie (EG) *nach Belieben in zween Theile* (FG, EF), *sie mögen gleich oder ungleich seyn, getheilt wird; so ist das Quadrat* (AE), *das auf der ganzen Linie gemacht wird, der Summe der Quadrate* (AI, EI) *die auf jedem der Theile gemacht worden sind, und des doppelten Rechtecks* (GI, CI) *aus den beiden Theilen gleich.*

Eucl. 2. 4. — St. p. 78. pr. 4.

Beweis. Mit 2, 1-2tes Corollarium.

1stes Corollarium.

Wenn eine Linie in zween gleiche Theile geschnitten wird; so ist das Quadrat, das auf der ganzen Linie beschrieben worden ist, das Vierfache des Quadrats, das auf einem der Theile gemacht worden ist.

2tes Corollarium.

Und das Quadrat, das auf einem der Theile beschrieben worden ist, ist ebenfalls dem Unterschied zwischen dem Quadrate, das auf der ganzen Linie beschrie-

schrieben, und der Summe des Quadrats, das auf dem zweeten Theile gemacht worden ist, nebst dem doppelten Rechtecke aus den beiden Theilen, zusammen genommen, gleich.

1ste Anmerk. Dieser Satz kann viel allgemeiner auf folgende Art ausgedruckt werden: *Wenn eine Linie in so viele Theile, als man verlangt, geschnitten wird; so ist das Quadrat, das auf der ganzen Linie beschrieben wird, der Summe der Quadrate, die auf jedem Theile beschrieben worden sind, und der doppelten Summe der Rechtecke gleich, welche aus allen Theilen je zween und zween zusammen genommen, gemacht werden können;* denn wenn man annimmt, daſs die Linie in verschiedene Theile (A, B, C) geschnitten sey; so ist, nach unserem Satze, das □ von (A + B + C) = □ auf (A + B) + 2. Rechtecke aus (A + B) und C + □ auf C; aber wenn man das □ auf (A + B) und das Rechteck aus (A + B) und C nach diesem Lehrsatze und dem 3ten Corollarium des vorhergehenden entwickelt; so hat man das Quadrat auf (A + B + C) = □ auf A + 2 Rechte. aus A und B + □ auf B + 2 Rechte. aus A und C + 2 Rechte. aus B und C + □ auf C, oder wenn man alles in Ordnung bringt, □ auf (A + B + C) = □ auf A + □ auf B + □ auf C + 2 Rechtecke aus A und B + 2 Rechtecke aus A und C + 2 Rechtecke aus B und C.

2te Anmerk. Wir werden in dem 7ten Corollarium des 7ten Lehrsatzes des 4ten Buches an-

anzeigen, daſs man das, was wir hier von Rechtecken und Quadraten von Linien geſagt haben, von der Multiplikation und zwoten Potenz oder dem Quadrat der Zahlen verſtehen kann. Daher können dieſe beyden Sätze auf alle Gröſsen angewandt werden: und dieſer allgemeine Satz giebt gerade die Regel an, die man befolgt, um die Quadratwurzel aus einer Zahl auszuziehen. S. noch den Anhang über die Wurzelausziehung aus Zahlen S. 476-481 S. incluſ. — und St. pp. 175 — 184. inclus.

3tes Corollarium.

Da das □ *auf* EG = □ FG + □ EF + 2. *Recht.* *aus* FG, EF; *ſo iſt das* □ *auf* EG + □ EF = □ FG + 2 □ *auf* EF + 2. *Recht. aus* FG, EF
= □ *auf* FG + 2. *Recht. aus* EF, (EF + FG) 3tes *Cor.* 1ſten *Satzes.*
= □ *auf* FG + 2. *Recht. aus* EF, EG,

das heißt: „Wenn eine Linie in zween Theile geſchnitten wird; ſo iſt das Quadrat auf der ganzen Linie, mit dem auf einem der Theile zuſammen genommen, dem doppelten Rechtecke aus dieſem Theile und der ganzen Linie, mit dem Quadrate auf dem andern Theile zuſammen genommen gleich.“

Eucl. 2. 7. — St. p. 82. pr. 7.

4tes Corollarium. 52ste Fig.

„*Wenn ebenfalls eine Linie* (GK) *in zween gleiche Theile* (IK, GI) *und in zween ungleiche Theile* (KH, HG) *getheilt wird; so ist die Summe der Quadrate auf den ungleichen Theilen, der doppelten Summe der Quadrate auf der halben Linie und auf dem Abschnitte zwischen den Theilungspunkten* (HI) *gleich.*“

Eucl. 2, 9.

Denn □ auf KH = □ auf IK + □ HI + 2. Recht. aus IK, HI; daher ist

□ auf KH + □ auf HG = □ auf IK + □ auf HI + 2. Recht. aus IK, HI + □ auf HG.

= dem □ auf GI + □ HI + 2. Recht aus GI HI + □ auf HG.

= □ auf GI + □ HI + 2. Recht. GI, IH + □ auf GI − 2. Recht. aus HI, HG − □ auf HI (2tes Cor.)

= 2mal □ auf GI + 2. Recht. aus HI und (GI, HG) 1sten Satzes 3tes Cor.)

= 2mal □ auf GI + 2mal □ auf HI.

Anmerkung. Dies stimmt in der That mit demjenigen überein, was wir in dem 1sten Beyspiele zu dem 5ten Lehrsatze von dem 2ten Buche bewiesen, und daselbst aus ganz andern Gründen geschlossen haben.

5tes

5tes Corollarium. 52ste Fig.

„*Wenn eine Linie* (IG) *in zween gleiche Theile* „*getheilt wird, und man sie nach Belieben* (*bis nach* „K) *verlängert; so ist das Quadrat auf der gegebenen* „*Linie und dem angefügten Theile, nebst dem Quadrate* „*auf dem angefügten Theile zusammen genommen, das* „*Doppelte der Summe der Quadrat auf der halben ge*-„*gebenen Linie* (HI), *und auf der Summe der halben* „*Linie und des angefügten Theils* (HK).

Eucl. 2. 10.

Wenn KI nach Belieben, und HG = IH genommen worden; so ist

□ auf KG = □ auf KH + □ HG + 2. Recht. aus KH, HG und daher
□ auf KG + □ KI = □ auf KH + □ KI + □ HG + 2 Recht. aus KH, HG
= □ auf KH + □ auf KH − 2 Recht. aus KI, IH − □ auf IH + □ auf HG + 2 Recht. aus KH, HG (2tes Cor.)
= 2. □ auf KH + 2 Recht. aus HI, (KH − KI) (1. S. 3tes Cor. in diesem Buche).
= 2. □ auf KH + 2. □ auf HI.

3ter Lehrsatz. 52ste Fig.

Wenn eine Linie (KG) *in zween gleiche Theile* (KI, GI) *und in zween ungleiche* (KH, HG) *getheilt wird; so wird das Rechteck* (LH) *aus den un*-

 gleichen

gleichen Theilen (KH, HG) *nebst dem Quadrate* (NP) *des mittlern Abschnittes* (IH), *dem Quadrate* (GN) *der halben Linie* (IG) *gleich seyn.*

Eucl. 2, 5. St. p. 79. pr. 5.

Beweis. Nach dem 3ten und 2ten Corollario des 1sten Lehrsatzes.

4ter Lehrsatz. 53ste Fig.

Wenn eine Linie (AC) *nach Belieben in zween Theile* (AB, BC) *geschnitten, und einer der Theile noch einmal beigefügt wird, so daß er mit ihr eine Linie ausmacht: so wird das Quadrat* (KD) *auf der zusammengesetzten Linie* (AD) *dem vierfachen Rechteck, aus der gegebenen Linie* (AC) *und dem erwähnten Theile* (*z. B.* BC) *nebst dem Quadrate des anderen Theiles* (AB) *zusammengenommen gleich seyn.*

Eucl. 2, 8.

Beweis. Nach dem 3ten, hernach 2ten Coroll. des 1sten Lehrsatzes.

Corollarium.

□ *auf* AC = *Recht.* AD, AB + □ *auf* BC, *das heißt: Wenn eine gerade Linie* (AC) *nach Wohlgefallen in zween Theile getheilt und einer dieser Theile noch einmal an dieselbe gefügt wird; so daß dieser mit der Linie eine gerade Linie macht; so ist das Quadrat der gegebenen Linie dem Rechteck aus der zusammengesetzten Linie und dem andern Theile jener

jener Linie, nebst dem Quadrate des angefügten Theiles zusammen genommen gleich.

Eucl. 2, 6. — St. p. 81. pr. 6.

5ter Lehrsatz. 139ste Fig.

Der Unterschied der Quadrate (H C *und* I C) *zwoer ungleicher Linien* (A C, B C) *ist dem Rechteck* (H E) *aus der Summe* (A D *oder* L E) *und dem Unterschied* (A B *oder* F E) *dieser beyden Linien gleich.*

Construktion. Man verlängert A C nach D, so daſs C D = B C werde, und zieht hierauf die Parallellinien D F, G F, K E, L I.

Beweis. Nach dem 2ten Corollarium des 1sten Satzes in dieſem Buche.

Corollarium. 52ste Fig.

Das Quadrat (M I) *auf der Hälfte* (K I) *einer Linie* (K G), *ist immer gröſser, als das Rechteck* (L H) *aus den zween ungleichen Theilen* (K H, H G) *welche zuſammen dieſelbe Linie* (K G) *machen.*

Beweis. Das Rechteck aus K H und H G ist das aus K I + I H und K I − I H: daher dem □ auf K I − □ auf I H gleich: woraus die Behauptung folget.

6ter Lehrsatz. 54ste Fig.

Die Dreiecke (A D I, A E I, H K L), *welche auf derſelben Grundlinie* (A I), *oder auf gleichen Grundlinien*

nien (A I, H L) *und unter denselben Parallelen stehen, und daher gleich hoch sind, sind gleich.*

Eucl. I. 37. 38. — W. g. §. 153. *) — St. p. 46. prr. 26. 27.

Construktion. Man endigt die ▭ ▭ B I, C I, G L.

Beweis. Er wird aus dem 1sten Satz dieses *Buchs*, und dem 1sten Corollarium des 19ten Satzes im 1sten *Buch* genommen.

1stes Corollarium.

Der Inhalt eines Dreiecks ist die Hälfte des Inhalts eines Rechtecks, das auf derselben Grundlinie steht und dieselbe Höhe hat (6tes und 1stes Cor. des 1sten Satzes), *und daher ist der Inhalt eines Dreiecks einem Rechteck gleich, dessen Grundlinie dieselbe, und die Höhe die Hälfte, oder dessen Höhe dieselbe und die Grundlinie die Hälfte von der des Dreiecks ist: so daſs die Rechtecke ebenfalls das natürliche Maas der Dreiecke, wie das der Parallelogrammen, sind.*

Anmerk. Wir werden über dieses Maas im 6ten, 7ten, 8ten Corollarium und in der 8ten Anmerkung zu dem 7ten Satz des 4ten Buchs ausführlicher handeln.

2tes Corollarium. 140ste Fig.

Zwey Dreiecke, welche auf eine und dieselbe Grundlinie oder auf gleiche Grundlinien auf derselben Seite

*) In dem lat. Werke Wolfs §. 385.

Seite gelegt und gleich ſind, ſind zwiſchen einerley Parallelen enthalten.

Eucl. I, 39. 40.

7ter Lehrſatz. 55ſte Fig.

In allen rechtwinklichten Dreyecken iſt das Quadrat (D B) *der Hypothenuſe* (*Queer-Seite, Abſeit, Seite*) (A B) *der Summe der Quadrate* (B G *und* C I) *der beyden übrigen Seiten* (B C *und* A C) *gleich.*

Eucl. I. 47. — W. g. §. 172. *) — St. p. 50. pr. 32.

Conſtruktion. Man nimmt an, daſs die Linie CK aus dem rechten Winkel C, der Linie AD oder EB parallel gezogen ſey: und man zieht die Linien CD, CE, AF, BI.

Beweis. Man beweiſst aus dem 8ten Lehrſatze des 1ſten Buches, daſs die Dreyecke BAI und DAC gleich ſeyn. Eben dies erhellt eben ſo auch für die Dreyecke ABF und EBC: hierauf zeigt man aus dem 6ten Coroll. des 1ſten Lehrſatzes eben dieſes Buchs, daſs ▭ AK = □ CI; ▭ BK = □ BG; woraus vermöge des 4ten Corollariums dieſes nemlichen Satzes das Reſultat erhellet.

1*ſte Anmerkung.* Dieſer Satz wird der Lehrſatz oder das Theorem des Pythagoras genannt, und iſt allgemein unter dieſem Nahmen bekannt. Man kann daſſelbe ſehr leicht aus der Lehre der

E 4 ähnli-

*) In dem lat. Werke. §. 417.

ähnlichen Dreyecke beweisen, wie wir es im 4ten Buche, S. 12, Anmerkung 3. thun werden.

2te *Anmerkung.* Dieser Satz und die zween folgende sind nur besondere Fälle eines allgemeinern Satzes, der sich auf alle Dreiecke, welche sie auch seyen, bezieht: diesen hat Pappus in seinen *Collectiones mathematicae* (Libr. IV. pr. 1.) vorgetragen; der berühmte Castillon hat ihn um vieles vermehrt. Siehe dessen schöne Abhandlung in den *Mem. de l'Acad. de Berlin. An.* 1766. *p.* 351.

1stes Corollarium.

In allen rechtwinklichten Dreiecken ist das Quadrat einer der Seiten um den rechten Winkel, dem Unterschiede der Quadrate auf der Hypothenuse und auf der andern Seite um den rechten Winkel: und folglich dem Rechtecke unter der Summe und dem Unterschiede der Hypothenuse und dieser Seite um den rechten Winkel gleich.

3te *Anmerkung.* Die Ursache dieses Schlusses, und die *Folgerung* erhellen aus dem 5ten Satze.

2tes Corollarium. 70ste Fig.

Wenn in einem Dreiecke (DEH), *die Quadrate zwoer Seiten* (DH, EH) *zusammen genommen dem Quadrate auf der dritten gleich sind; so ist dieses Dreieck rechtwinklicht: und der rechte Winkel wird von den*

den beyden Seiten, deren Quadrate man zusammenzählt, gebildet.

Eucl. I. 48.

Construction. Man nimmt an, daſs FH = DH und ⊥ auf EH: und man zieht EF.

Beweis. Durch diesen Satz: und den 12ten im 1sten Buche.

4te *Anmerkung.* Man kann das nemliche aus dem *Ungereimten* beweisen: wenn der folgende 8te und 9te Satz erst bekannt sind.

3tes *Corollarium.* 56ste *und* 57ste *Fig.*

In allen Dreyecken (ACB) *ist der Unterschied der Quadrate auf zwo Seiten* BC, AC *dem Unterschiede der Quadrate beyder Stücke* (BD, AD), *die auf der Grundlinie durch die Lothlinie* (CD), *welche von dem Scheitelpunkte gezogen worden ist, gemacht werden: und folglich auch dem Rechtecke, unter der Summe und dem Unterschiede der genannten Stücke gleich.*

5te *Anm.* Die Ursache dieses Schlusses und die Folgerung beruhen auf dem 1sten Cor. dieses Satzes und auf dem 5ten Satze.

4tes *Corollarium.* 56ste *und* 57ste *Fig.*

Wenn zwey rechtwinklichte Dreiecke DCB, ACD *die nemliche Höhe* CD *haben; so sind* 1) *die Summen der Quadrate der Queer-Seite in dem einen und*

 der

der Grundlinie in dem andern (□ *auf* BC + □ *auf* AD = □ *auf* AC + □ *auf* BD) *gleich, und* 2) *die Unterschiede der Quadrate von den Hypothenusen und der von den Grundlinien auch gleich:* (*d. h.* □ *auf* BC − □ *auf* AC = □ BD − □ *auf* AD).

5tes Corollarium. 51ste Fig.

Wenn man in einem Rechtecke (ACEG) *einen Punkt* I *nach Belieben nimmt, von welchem man gerade Linien* (IA, IC, IE, IG) *nach den Winkeln ziehet; so werden die Summen der Quadrate auf den Linien, die nach den entgegengesetzten Winkeln gezogen werden, immer gleich seyn; das heisst,* □ *auf* AI + □ auf EI = □ auf CI + □ auf GI.

Beweis. Aus diesem Satze, nebst dem 19ten aus dem 1sten Buche.

6te Anm. Man ist nun im Stande, das 12te Problem des 1sten Buches, und das 25ste, 27ste 28ste des 3ten Buches aufzulösen.

8ter Lehrsatz. 56ste Fig.

Wenn man aus dem rechten Winkel (C) *eines rechtwinklichten Dreyeckes* (ACB) *eine senkrechte Linie* (CD) *auf die Hypothenuse* (AB) *fallen läßt; so wird das Quadrat dieser Lothlinie* (CD) *dem Rechtecke unter den Stücken* (AD, BD) *dieser Hypothenuse gleich seyn.*

Eucl. X. Lemma I. des 34sten Satzes.

Beweis.

Beweis. Aus dem 1sten Corollarium des 7ten Satzes, aus dem 7ten Satze selbst, und hierauf aus dem 2ten Satze, alle aus diesem Buche.

Anmerk. Dieser Satz kann auch aus den Eigenschaften des Cirkels, oder aus denen der gleichförmigen Dreyecke bewiesen werden, wie wir es im 5ten Buche, dessen 3ten Corollarium des 12ten Satzes, und im 1sten Corollarium des 12ten Satzes im 4ten Buche, thun werden.

1stes Corollarium.

Wenn in einem Dreyecke, das Quadrat der Lothlinie (CD), *die aus einem der Winkel* (ACB) *auf die entgegengesetzte Seite* (AB) *niedergefällt wird, dem Rechtecke der Stücke* (AD, DB) *die dadurch auf dieser Seite gemacht worden sind, gleich ist; so ist der genannte Winkel immer ein rechter Winkel.*

Beweis. Aus dem Ungereimten, vermittelst dieses Satzes.

2tes Corollarium.

Das Quadrat einer der Seiten (AC) *eines rechtwinklichten Dreyecks, ist immer dem Rechtecke unter der Queer-Seite* (AB), *und demjenigen Stücke* (AD) *der Queer-Seite, welches durch die aus dem rechten Winkel niedergefällte Lothlinie* (CD) *abgeschnitten wird und an die genannte Seite* (AC) *gränzet, gleich.*

Eucl. X. Lemma I. des 34sten Satzes.

Beweis.

Beweis. Aus dem 7ten Satze, diesem Satze, und dem 3ten Corollarium des 1sten Satzes aus diesem Buche.

Anm. Dasselbe kann aus der Lehre der ähnlichen Dreyecke gefolgert werden, wie wir es in dem 4ten Buche, 12ten Satze, 2ten Coroll. zeigen werden.

3tes Corollarium.

Das Rechteck der Queer-Seite (AB), *und eines ihrer Stücke* (AD) *ist immer dem Rechtecke aus der Summe und dem Unterschiede dieser nemlichen Queer-Seite* (AB), *und derjenigen Seite um den rechten Winkel* (BC), *die an das andere Stück* (BD) *gränzt, gleich.*

Beweis. Aus dem vorigen Corollarium, und dem 1sten Corollarium des 7ten Satzes.

9ter Lehrsatz, 57ste 58ste Fig.

In allen Dreiecken ist das Quadrat einer Seite (BC) *größer oder kleiner, als die Summe der Quadrate auf der Grundlinie* (AB) *und der dritten Seite* (AC), *je nachdem der Winkel* (BAC) *der der erstgenannten Seite gegenüber liegt, stumpf oder spitzig ist: und der Unterschied ist das doppelte Rechteck von der ganzen Grundlinie* (AB) *und dem Stücke* (AD) *derselben, welches zwischen dem gemelten Winkel und der Loth-Linie* (CD) *liegt, die aus dem gegenüberstehenden Winkel* (ACB) *gezogen ist.*

Eucl. 2. 12. 13. — St. p. 83. 8ter S. und p. 84. 9ter S.

Beweis. Nach dem 7ten Lehrsatze nimmt man in dem Dreiecke (BCD) den Werth des Quadrats auf (BC): hierauf nach dem 1sten Corollarium dieses Satzes, in dem Dreiecke (ACD) den des Quadrats auf (CD) sodann nach dem 2ten Corollarium des 2ten Satzes den Werth des Unterschiedes der Quadrate auf (BD) und (AB).

1ste Anm. Wenn der Winkel BAC ein rechter Winkel wäre; so fiele die Lothlinie CD auf AC: und man bekäme wieder den 7ten Satz: das Stück AD, welches alsdann *Nul* würde, wäre der Ueberschuſs, oder das, um welches das ☐ auf BC in Vergleichung mit der Summe der Quadrate auf AB und AC zu kurz käme, auch Nul.

2te Anm. Aus dem 6ten Corollarium des 7ten Lehrsatzes im 1sten Buche folgt: daſs in dem ersten Falle die Lothlinie CD auſserhalb, in dem zweyten innerhalb des Dreiecks fällt: und daſs daher der zweyte Theil des Satzes, auch in Rücksicht auf rechtwinklichte Dreiecke Statt findet, wenn die Queer-Seite (Hypothenuse) als die Grundlinie angesehen, und daher die Lothlinie von dem rechten Winkel aus gezogen wird.

1tes Corollarium. 58ste Fig.

Wenn man aus zween Winkeln (A) *und* (C), *die an die Endpuncte der nemlichen Seite* (AC) *grän-*

zen,

zen, Lothlinien (A E) (C D) *auf die ihnen gegenüberstehenden Seiten ziehet; so sind die Rechtecke, die unter diesen Seiten* (A B) (B C) *und ihren Stücken* (B D) (B E), *die an den nemlichen Winkel gränzen, enthalten sind, gleich.*

3te *Anm.* Wenn der < A C B, wie der in der 56sten Fig. ein rechter Winkel ist; so ist das Rechteck A B, B D = □ B C, wie wir dies schon in dem 2ten Corollarium des 8ten Satzes bewiesen haben, und noch in dem 4ten Buche, dessen 12ten Lehrsatze, 2ten Corollarium in der Lehre von den ähnlichen Dreiecken erhärten werden.

2tes Corollarium. 58ste Fig.

Wenn man aus dem Punkte (C) *eines Dreiecks* (A C B) *auf die gegenüberstehende Seite* (A B), *eine Linie* (C F) *ziehet, welche diese Seite in zwey gleiche Theile schneidet: so ist das doppelte Quadrat dieser Linie, nebst dem doppelten Quadrate der Hälfte der Grundlinie, der Summe der Quadrate der zwey übrigen Seiten gleich: das heißt:* 2. □ *auf* C F + 2. □ *auf* A F = □ *auf* A C + □ B C. *Daher der*

Lehrsatz.

Der 4te Theil des Quadrats der Seite, auf welche die Linie niedergefällt ist, ist dem Unterschiede von der Hälfte der Summe von den Quadraten der übrigen Seiten, und von dem Quadrate der niedergefällten Linie gleich, d. h. $\frac{□ \text{ auf } AC + □ \text{ auf } BC}{2} - □ \text{ auf } CF = \frac{1}{4} □ AB.$

Con-

Construction. Für den Beweis wird die senkrechte Linie (C D) gezogen.

Beweis. Vermöge des am Anfange des Corollariums Gesagten und des 1sten Corollariums des 2ten Satzes.

3tes Corollarium. 58ste Fig.

In allen Parallelogrammen (z. B. I K L M) *ist die Summe der Quadrate beyder Diagonalen* (I L, K M) *der Summe der Quadrate der vier Seiten* (I K, I M, K L, L M) *gleich.*

St. p. 85. 10ter Lehrsatz.

Beweis. Aus dem 8ten Lehrsatze des 1sten Buchs, und aus diesem Lehrsatze.

4te Anm. Wenn das Parallelogramm eine Raute ist; so ist die Summe der Quadrate beyder Diagonalen, das Vierfache des Quadrats einer der Seiten.

10ter Lehrsatz 141ste Fig.

Wenn man ein gleichschenkliches Dreieck (B A D) *so gestellt hat, daſs die Winkel* (B *und* A D B) *auf der Grundlinie das Doppelte von dem Winkel an dem Scheitel* (A) *sind, und wenn man aus einem der Winkel* (D) *auf der Grundlinie, auf den gegenübergebenden Schenkel eine Linie* (C D) *zieht, welche dieser Grundlinie gleich ist; so wird sie von diesem Schenkel ein Stück dergestalt abschneiden, daſs 1stens der übrige Theil* (A C) *der Grundlinie: 2tens, das Quadrat* die-

dieses Theils dem Rechtecke unter dem ganzen Schenkel (AB) *und dem ersten Stücke* (BC) *gleich seyn wird: 3tens, daſs in dem gleichschenklichen Dreeicke* (BCD) *welches von der Grundlinie* (BD) *dieses gegebenen Dreieckes und der gezogenen Linie* (CD) *gemacht seyn wird, die Winkel* (B *und* BCD) *auf der Grundlinie auch das Doppelte von dem Winkel* (BDC) *an dem Scheitel seyn werden: und 4tens, daſs dieser Winkel* (BDC) *der dritte Theil von dem äußeren Winkel* (ACD) *der durch die Linie* (CD) *mit dem Schenkel* (AB), *worauf sie gezogen ist, gebildet ist, seyn wird.*

Construktion. DE sey auf BC lothrecht: und daher (nach des 11ten Satzes 4tem Corollarium, im 1sten Buche) BE = EC, und BC = 2 BE.

Beweis. *) 1) Nach dem 11, 7ten und 10ten Lehrsatze des 1sten Buches. 2) Nach dem 9ten Lehrsatze dieses Buchs, der Construction, dem 2ten Lehrsatze und dem 3ten Corollarium des 1sten, beyde aus diesem Buche. 3) Nach dem 11ten Satze und dem 3ten Corollarium des 7ten Satzes aus dem 1sten Buche. 4) Nach dem 8ten Corollarium des 11ten Satzes im 1sten Buche, oder nach dem 7ten und 11ten Lehrsatze des 1sten Buches.

1stes Corollarium.

Das Umgekehrte hat auch Statt, nemlich: Wenn eine Linie (AB) *in zween Theile so getheilt wird, daſs aus*

*) Noch kürzer möchten diese Lehrsätze bewiesen werden können, der 2te aus dem 9ten Lehrsatze und der Construction; der 3te könnte auch aus dem 1sten Falle abgeleitet werden. Im Beweise des 4ten setzte ich den 7ten Satz gerne vor den 11ten. Der Überſ.

das Quadrat des gröſten Stücks (A C) *dem Rechtecke unter dem kleinſten Stücke* (B C) *und der ganzen Linie* (A B) *gleich iſt, und man aus dem Punkte des Schnittes* C *einen Cirkel ziehet, deſſen Radius das gröſte Stück iſt, und aus dem andern Ende* (A) *des gröſten Stückes* (A C) *mit einem Radius* (A D), *der der ganzen Linie* (A B) *gleich iſt, einen andern Cirkelbogen, der den erſten Cirkel in* (D) *ſchneidet und aus dieſem Schneidungspunkte Linien* (D A, D B, D C) *nach den Enden* (A, B) *und dem Schneidungs-Punkte* (C) *der gegebenen Linie ziehet; ſo wird man zwey gleichſchenkliche Dreyecke erhalten, in welchen beyden die Winkel auf der Grundlinie das Doppelte von dem im Scheitel; die Schenkel des groſsen Dreyecks* (B A D) *der gegebenen Linie; und die des kleinen ihrem gröſten Stücke* (A C) *gleich ſeyn werden.*

St. p. 87. 12ter Lehrſatz.

Conſtruktion: D E ſey ⊥ auf B C.

Beweis: Nach dem 9ten und 2ten Lehrſatze dieſes, und dem 4ten Corollarium vom 11ten Lehrſatze des 1ſten Buches beweiſst man; daſs C D = B D iſt; das Uebrige erhellet aus dem vorhergehenden; und aus I, 7.

2tes Corollarium

Hieraus folgt auch, daß < B D C = < C D A; *oder daß* < B D A, *durch die Linie* D C *in zween gleiche Theile getheilt werde.*

3tes *Corollarium.*

Hieraus folgt auch, daſs, wenn in einem gleichschenklichen Dreyecke der Winkel auf der Grundlinie das Doppelte von dem in dem Scheitel iſt, die Linie (D C) *welche den erſten Winkel in zween gleiche Theile ſchneidet, die gegenüberſtehende Seite* (A B) *dergeſtalt ſchneiden wird: 1ſtens, daſs das Quadrat des gröſten Stückes dem Rechtecke unter der ganzen Linie, und dem kleinſten Stücke; 2tens, daſs das gröſte Stück der Grundlinie gleich ſeyn wird.*

4tes *Corollarium.*

Es erhellet aus dieſem Satze, daſs die Beſchreibung eines gleichſchenklichen Dreyecks, worin die Winkel auf der Grundlinie das Doppelte des Scheitelwinkels ſind, von demjenigen Schnitte einer Linie abhängt, nach welchem das Quadrat eines Stücks dem Rechtecke unter der ganzen Linie und dem andern Stücke gleich iſt, oder, wie wir es in der 2ten Def. des 4ten B. nennen werden, vom Schneiden in äuſſerſtes und mittelſtes Verhältnis. Siehe das 3te B. der Aufgaben, den 10ten Satz. Es erhellet weiter, daſs das Schneiden eines Winkels in drey gleiche Theile, auch zum Theil von dem nemlichen Elemente abhängt, welches wir in dem 1ſten B. 11ten Lehrſ. 8 Coroll. bereits genannt haben, und näher in der Anm. zum 8ten B. 8ten Lehrſ. anzeigen werden. S. auch die Anmerkungen zur 1ſten Aufg. des 2ten Buches.

Zwey-

Zwote Classe von Definitionen.

3te Definition.

Ein regulaires Polygon (regelmäßiges Vieleck) ist dasjenige, dessen Seiten alle gleich sind, und gleiche Winkel mit einander machen.

Corollarium.

Das gleichseitige Dreyeck und Viereck können daher auch auf regelmäsige Vielecke zurückgeführt werden.

Anmerk. 142*ste Fig.* Man muſs recht gute Acht auf die doppelte Bedingung haben, die in der Definition enthalten ist; denn es können in einem Vielecke alle Winkel gleich seyn, ohne daſs die Seiten es auch seyen, wie z. B. in dem Vielecke ABGHDEFA, oder es können alle Seiten gleich seyn, wie in dem Vielecke: AIKDEFA, wenn die Winkel es auch nicht sind: in keinem der beeden Fälle ist das Vieleck regelmäsig, wie das Vieleck ABCDEFA es ist, wo die Seiten und die Winkel gleich sind.

S. *Clavius* zum 4ten B. *Euclids.*

4te Definition. 60*ste Fig.*

Man heiſst innere Winkel des Vielecks die Winkel, welche die Seiten des Vielecks nach der einwärts gehenden Seite mit einander machen: und äussere Winkel diejenigen, welche eine Seite mit der verlängerten nächstgelegenen nach aussen zu macht.

5te Definition.

Centrum oder Mittelpunkt eines Vielecks ist ein Punkt (C) welcher so gelegen ist, daſs die Linien (CA, CM, CK, CH, CF, CD), *welche nach den Winkeln des Vielecks gezogen werden, gleich sind, und diese in zween gleiche Theile schneiden.*

Anmerk. Wir werden im 14ten Lehrsatze beweisen, daſs es ein solches *Centrum* oder einen solchen Mittelpunkt in den regulairen Vielecken gebe.

6te Definition.

Man nennt Umkreis (Umfang) des Vielecks die Summe aller seiner Seiten.

Corollarium.

In einem regelmäßigen Vielecke ist der Umfang einer der Seiten, die so oftmals genommen wird, als Einheiten in der Zahl sind, welche angiebt, aus wie vielen Seiten das Vieleck bestehe, (oder einer der Seiten multiplicirt mit der Anzahl aller seiner Seiten) gleich.

7te Definition. 60ste Fig.

Die Lothlinie, welche aus dem Mittelpunkte eines regelmäßigen Vielecks auf eine der Seiten fällt, wird die Lothlinie dieses Vielecks genannt.

Anmerk. Bey den Alten wird diese Linie *Apotheme*, d. h. *niedergelassene Linie* genannt.

11ter Lehrsatz. 61ste Fig.

In allen (regelmäßigen oder unregelmäßigen) Vielecken (BCDEA) beträgt die Summe aller innern Winkel zweymal so viele rechte Winkel, als es Seiten giebt, weniger zween rechte Winkel.

Tacquet zum 32sten Lehrsatze des 1sten Buchs von *Euklid*.

Construktion. Man nimmt irgend einen Punkt I nach Wohlgefallen an, und zieht von demselben Linien nach den Winkeln des Vielecks, um es in so viele Dreyecke zu theilen, als es Seiten hat.

Beweis. Mit dem 7ten Lehrs. und dem Corollarium des 3ten, beyde aus dem 1sten Buche.

Anmerk. Dasselbe gilt daher auch vom Dreyecke. Jedoch würde man diesen allgemeinern Lehrsatz nicht haben beweisen können, wenn man nicht zuvor einen besonderen Fall, nemlich den vom Dreyecke, aus andern Gründen bewiesen hätte. Man sieht daher die Wahrheit dessen, was *s'Gravesande* in seiner Logica §. 1096. sagt, erhärtet: daſs man einen allgemeinen Satz oft nicht eher beweisen könne, als man einen besonderen Fall desselben bewiesen habe. Wir werden im Verfolge viele Beyspiele dieser Art antreffen.

1stes Corollarium.

Wenn das Vieleck regelmäßig ist, und die Anzahl der Seiten durch g *ausgedruckt wird; so wird jeder* Win-

Winkel, da sie alle gleich sind, so viele rechte Winkel in sich fassen, als durch die Zahl $\frac{2g-4}{g}$ *ausgedrückt werden.*

2tes Corollarium.

Es giebt nur drey Arten von Figuren, das gleichseitige Dreyeck, das Viereck und das regelmäsige Sechseck, die, wenn sie um einen und denselben Punkt gestellt werden, genau, und ohne Etwas übrig zu lassen, einen Raum füllen können: dies geschieht namentlich mit sechs Dreyecken, vier Vierecken, und drey Sechsecken.

Tacquet zur letzten Proposition des 4ten Buchs *Euklids.*

12*ter Lehrsatz.* 61*ste Fig.*

Alle äusseren Winkel eines Vielecks sind vier rechten Winkeln gleich.

Tacquet zur 32sten Prop. im 1sten Buche Euklids.

Beweis. Mit dem 1sten Lehrsatze des 1sten Buches und dem vorhergehenden Lehrsatze.

Anmerk. 62*ste Fig.* Wir handeln in diesem Lehrsatze von Vielecken, worinnen die Spitzen aller Winkel auswärts gehen. Wäre dies nicht, so gäbe es Winkel, deren Spitzen einwärts (wie HFD) giengen; so blieb der 11te Satz zwar derselbe; allein dieser würde demnach so verändert:

Alle

Alle äusseren Winkel eines Vielecks sind der Summe vier, — und zweymal so viel rechter Winkel, als es Winkel giebt, deren Spitzen einwärts gehen, gleich.

L. C. §. 520.

13ter Lehrsatz. 143ste Fig.

Wenn man innerhalb eines Vielecks, es mag seyn, welches es wolle, einen Punkt (P) *annimmt: und von demselben Linien* (PB, PA, PD *u. s. w.*) *nach allen den Winkeln* (B, A, D *u. s. w.*) *zieht, und hierauf von demselben auf jede der Seiten, Linien* (PT, PX *u. s. w.*) *niederläßt, welche die Seiten in zween gleiche Theile schneiden; so wird der Unterschied zwischen der Summe der Quadrate aller Linien, die nach den Winkeln gehen, und der Summe der Quadrate von allen Linien, welche die Seiten schneiden, dem vierten Theile von der Summe der Quadrate von allen Seiten des Vieleckes gleich seyn.*

Fagnano, Opera Mathem. T. II. p. 206.

Beweis. Man wendet den Satz des 2ten Corollariums des 9ten Lehrsatzes auf jedes der Dreyecke (BPA u. s. w.) an, nimmt die Summe, und erhält die Summe, deren in dem Lehrsatze erwähnt wird.

14ter Lehrsatz. 60ste Fig.

Wenn man alle Winkel eines regelmäßigen Vielecks in zween gleiche Theile theilt; so werden 1stens alle Linien, welche die Winkel auf diese Art theilen, (AC, DC, FC, HC, KC, MC) *in einem Punkte*

C zusammentreffen; 2tens. Sie werden alle gleich seyn, und daher das Vieleck in so viele gleichschenkliche Dreyecke theilen, als es Seiten giebt; 3tens. Sie werden um den Punkt C *gleiche Winkel* (ACD, DCF, FCH *u. s. w.*) *machen; und 4tens, dieser Punkt* C *wird von allen Seiten gleich weit entfernt seyn, das heisst: die Lothlinien, die von diesem Punkte auf die Seiten gezogen werden, werden alle gleich seyn: und dieser Punkt wird daher der Mittelpunkt des Vielecks seyn.* (5te Definition.)

H. g. §. 129.

Beweis. Das Erste folgt aus des 1sten Buches 9ten Lehrsatze, und 1stem Corollarium aus dem 11ten Lehrsatze.

Das Zweyte und Dritte aus demjenigen, was in dem Beweise des Ersten schon erwiesen ist.

Das Vierte aus der Gleichheit der Dreyecke CDB, CED, CEF, CGF u. s. w. vermöge des 9ten Lehrsatzes im 1sten Buche.

Der Grund der *Erklärung* am Ende des vierten Theiles des Lehrsatzes erhellet aus des 1sten Buches 1sten Corollarium vom 14ten Satze.

1ste Anmerk. Da der Punkt C mit Grund Mittelpunkt genannt wird, so kann man die gleiche Linien CA, CD u. s. w. die nach den Winkeln gehen, *Strahlen*, (*Radii*) nennen, aus Analogie mit dem, was bey dem Cirkel Statt hat, (1 B. 14te Def.)

2te

2te Anmerk. Die gleichschenklichen Dreyecke, in welche das Vieleck getheilt wird, werden mit Recht *Mittelpunkts*-Dreyecke genannt, weil sie um den Mittelpunkt liegen: und da sie untereinander gleich sind, so gilt für alle, was von einem von ihnen bewiesen wird.

1stes Corollarium.

Jeder Winkel um den Mittelpunkt, oder der Mittelpunkts-Winkel des regelmäßigen Vielecks, der von den zwo Linien (CA, CD *u. s. w.*) *die nach den Endpuncten einer und derselben Seite* (AD *u. s. w.*) *gehen, gebildet wird, ist* $= \frac{4R}{g}$, *wenn man den rechten Winkel durch* R, *und die Anzahl Seiten durch* g *ausdruckt* (Corollarium vom 3ten Satze im 1sten Buche.) *Und daher ist der Winkel, den zwo Seiten eines regelmäßigen Vieleckes machen, den* (g — 2) *halben Mittelpunkts-Winkeln gleich. Denn dieser Winkel ist* $\frac{(2g-4)R}{g}$, *daher* $= \frac{4R(g-2)}{2g} =$ (g — 2 *halben Mittelpunkts-Winkeln.*

2tes Corollarium.

In einem regelmäßigen Sechsecke ist das Dreyeck, das von einer Seite und zween Strahlen im Mittelpunkte gebildet ist, gleichseitig.

Des 11ten Lehrsatzes 1stes Corollarium, das vorhergehende Corollarium und das 2te Corollarium des 10ten Lehrsatzes im 1sten Buche.

3tes Corollarium.

Wenn die Seitenzahl eines regelmäßigen Vielecks gerade ist; so werden die beyden Linien, die von dem Mittelpunkte nach den entgegengesetzten Winkeln gezogen werden, eine gerade Linie machen: diese Linien werden das Vieleck in zween gleiche Theile theilen und können daher Diagonalen genannt werden: die beyden Linien, die von dem Mittelpunkte auf die gegenüberstehendne Seiten senkrecht gezogen werden, werden auch eine Linie machen und das Vieleck in zween gleiche Theile theilen: das Nehmliche findet auch für jede Linie Statt, die durch den Mittelpunkt gezogen wird: und endlich werden die gegenüberstehenden Seiten mit einander parallel seyn.

Das erste und zweyte erhellet aus diesem Lehrsatze, einem im 1sten Corollarium enthaltenen Satze und dem 2ten Lehrsatze des 1sten Buchs: das letzte aus dem Lehrsatze und dem 4tenLehrsatze des 1sten Buchs. *)

L. C. §§. 512. 513.

3te *Anmerkung.* *Man nennt daher mit Grund die regelmäßigen Vielecke, deren Seiten eine gerade*

*) Ich berge nicht, daſs ich dieſen Beweis in Etwas ergänzt, glaube aber, daſs er noch mehr ergänzt werden könnte, laſſe aber das etwa noch fehlende weg, da es ſehr leicht zu finden iſt, und ich ſelbſt in meinem Unterrichte gewohnt bin, nicht immer alle Gründe anzugeben, ſondern dem Schüler mit dem Finden derſelben eine Freude zu machen. Der Ueberſ.

rade Zahl machen, auch symmetrische oder ebenmäßige Vielecke.

4tes *Corollarium.* 144*ste Fig.*

Hieraus folgt wieder, daß in diesen ebenmäßigen Vielecken, die Linien (AD GE), *die nach den Endpunkten der einander gegenüberstehenden, und daher parallelen Seiten gezogen werden, mit diesen Seiten rechte Winkel machen.*

15*ter Lehrsatz.* 144*ste Fig.*

Wenn man in einem regelmäßigen Vielecke, dessen Seiten in der Zahl gerade sind, und also in einem ebenmäßigen Vielecke, die Endpunkte der Seiten, die mit einander parallel sind, durch gerade Linien vereiniget; so werden diese wegen ihrer wechselsweisen Begegnung, um den Mittelpunkt des Vielecks ein neues regelmäßiges Vieleck machen, das viele Seiten, als das gegebene Vieleck hat und dessen Lothlinie die Hälfte der Seite des gegebenen ist.

Du Fay. Mem. de l'Acad. 1727. p. 299.

Beweis. Vermöge des 1sten Buches 11ten und 9ten Lehrsatze und des 3ten Corollariums vom 14ten Lehrsatze dieses Buchs.

Anmerkung. Wir werden in dem 7ten Corollarium des 21sten, und in dem 3ten Corollarium des 29sten Lehrsatzes, (beyde Lehrsätze aus dem 6ten Buche), die inneren Vielecke näher betrachten.

16ter *Lehrsatz*. 145ste *Fig*.

Wenn man aus den beiden Endpunkten jeder Seite eines regelmäßigen Vielecks, dessen Seiten in der Zahl ungerade sind, auf diese Seiten senkrechte Linien errichtet; so werden diese wegen ihrer wechselsweisen Begegnung zwey regelmäßige Vielecke bilden, die einander gleich seyn werden, und wovon jedes eben so viele Seiten, als das gegebene Vieleck, haben wird: ihre Lothlienie wird die Hälfte der Seite des gegebenen Vielecks seyn: sie werden den Mittelpunkt des ersten Vielecks zum Mittelpunkte haben; und immer zwischen das Vieleck fallen, dieses wäre denn ein (gleichseitiges) Dreieck. Weiter: wenn man jeden Punkt des gegebenen Vielecks als den Anfang einer Seite und das Ende der zunächst vorhergehenden betrachtet; so werden die Lothlienien, die aus dem Beginne jeder Seite auf dieselbe gezogen werden, das eine Vieleck, und die Lothlinien, die aus dem Ende jeder Seite auf dieselbe gezogen werden, das andere Vieleck bilden.

Du Fay, Mem. de l'Acad. 1727. p. 299. doch nicht so allgemein. Er spricht nur von *einem* Vielecke.

Beweis. Aus des 1sten Buchs 7ten, desselben 11tem und desselben 9tem Lehrsatze.

Anmerkung. Das 8te Corollarium des 21sten Satzes im 6ten Buche und das 5te vom 30sten im nemlichen Buche werden die Art dieser innern Vielecke noch näher kennen lehren.

17ter Lehrsatz.

Der Inhalt eines regelmäßigen Vielecks ist dem eines Dreiecks gleich, dessen Grundlinie der Umfang des Vielecks, und die Hohe die senkreehte Linie ist, die vom Mittelpunkte auf eine der Seiten des Vielecks niedergefällt wird.

St. p. 135. pr. 13.

Beweis. Vermöge des 6ten Satzes.

Corollarium.

Der Inhalt eines regelmäßigen Vielecks ist dem eines Rechteckts gleich, dessen Höhe die Lothlienie die vom Mittelpunkte auf eine der Seiten gezogen wird, und die Grundlinie die Hälfte vom Umfange des Vielecks ist. 6ten Lehrsatzes 1stes Corollarium.

Anmerkung. Der Inhalt der Vielecke wird daher auch auf den der Rechtecke zurückgeführt.

18ter Lehrsatz 147*ste Fig.*

Wenn man auf allen Seiten eines regelmäßigen Vielecks Punkte (E, F, G, I, L) *nimmt, die von den nächsten Winkeln* (A, D, C, B, Q) *gleich weit entfernt sind; so werden die Linien, welche diese Punkte vereinigen, ein regelmäßiges Vieleck von eben so vielen Seiten machen, als das gegebene Vieleck selbst hat: und der Mittelpunkt dieses zweyten Vielecks wird der Mittelpunkt des ersten seyn.*

Beweis. Das erste: aus der Gleichheit der Dreiecke AEL, EDF, u. s. w. vermöge des 8ten S. im 1sten Buche. Das zweyte; aus der Gleichheit der Dreiecke AOL, EOD, u. s. w. und daher der Linien LO, EO, FO u. s. w., woraus folgt, daſs O der Mittelpunkt ist.

Anmerkung. *Simpson* hat dies allein für das Quadrat bewiesen, in seinem 1sten Buche pr. 28.

19ter Lehrsatz. 146ste *Fig.*

Der Inhalt eines Trapeziums (CEBA), *dessen zwo Seiten* (CA, EB) *mit der Grundlinie* (AB) *rechte Winkel machen, ist einem Rechtecke gleich, dessen Grundlinie die des Trapeziums und die andere Seite die halbe Summe der Seiten des Trapeziums ist, welche mit der Grundlinie die rechten Winkel machen.*

St. p. 69. pr. 37.

Beweis. Mit dem 6ten Lehrsatze.

20ster Lehrsatz.

Der Inhalt aller geradlinichen Figuren wird auf den der Rechtecke zurückgeführt: und man kann immer ein Rechteck machen, das dem Inhalt einer gegebenen Figur gleich ist.

Beweis. Die Figur wird durch Linien in Dreiecke getheilt: jedes Dreieck ist einem bestimmten Drei-

Dreiecke (6ten Lehrsatzes 1stes Corollarium) gleich: und man kann vermöge dessen, was schon gelehrt worden ist, ein Rechteck machen, welches der Summe verschiedener anderer Rechtecke, und daher dem gegebenen Vielecke gleich sey. S. das 16te und 18te Problem des 3ten Buchs der Aufgaben.

Drit-

Drittes Buch.

Ueber die Proportion.

Einleitung,

welche die allgemeine Definition enthält.

1.

Wenn eine *Größe*, *welche verschiedene mal genommen, oder wiederhohlt, mit andern Worten: wenn eine Größe, welche mit einer Zahl vervielfältiget worden ist, einer andern Größe gleichkömmt: so ist sie ein* **gleicher** *) *ein* **aufsteigender** *Theil* (pars aliquota) *dieser zwoten Größe: doch wenn sie ein*

*) Das holländische Wort *effen* drückt so wohl *gleich* als *gerade* aus. Man erlaube mir daher, daſs ich in Zukunft mich auch des Worts: *gerader* Theil bediene. Der Ueb.

ein und mehreremal genommen wird und derselben nicht gleich kömmt, sondern kleiner bleibt, und, noch einmal genommen, grösser wird, ist sie ein ungleicher Theil (pars aliquanta) *derselben.*

Eucl. 5, 1ste Def. und s. hierauf, wie immerhin in diesem ganzes Buche, die Anmerkungen von *König.*

Anmerk. Ich sage eine *Grösse*, und nicht bloss eine Zahl; denn eine kleinere Linie kann sowohl ein gleicher Theil einer grössern Linie, oder kleinere Cirkel, kleinere Fässer können sowohl gleiche Theile, die ersten von grösseren Cirkeln, die anderen von grösseren Fässern seyn, als eine kleinere Zahl ein gleicher Theil von einer grössern seyn kann: 1, 2, 5 sind gleiche, gerade, 3 aber, 4, 7, 8, 9 sind ungleiche, ungerade Theile von 10.

2.

Eine Grösse wird ein Vielfaches oder Vervielfältigtes (multiplex) *von einer andern genannt, wenn diese jene misst, oder ein gleicher Theil von ihr ist: und dieser gleiche Theil wird eine submultiplicirte Grösse, ein aufsteigender Theil* (submultiplex) *von der andern Grösse genannt.*

Z. B. 10 ist ein *Vielfaches* von 1, 2, 5, doch nicht von 3, 6, 7, 8, 9; und 1, 2, 5 sind *Submultiplicirte* von 10.

Eucl. 5, 2te Def. und 7, 5te Def.

Anmerk. Ich sage Grösse und nicht bloss *Zahl*, aus dem schon angeführten Grunde, welcher auch für die folgende Definition gilt.

1stes Corollarium.

Hievon kommen die Benennungen doppeltes, dreyfaches u. s. w. (subduplum) *Unterdoppeltes oder Hälfte, Unterdreyfaches* (subtriplum) *oder dritter Theil.*

3.

Von zwoen oder mehreren Größen wird gesagt, sie seyen Gleichvielfache, oder Gleichvervielfältigte (aequimultiplicia) *von zwoen oder mehreren andern, wenn sie diese Größen gleich vielmahl enthalten, jede nemlich die Größe, von welcher sie das Vervielfältigte, das Vielfache ist.*

Z. B. 20, 40, 60 sind *Gleichvervielfältigte* oder *Gleichvielfache* von 4, 8 und 12, oder 5, 10, 15, oder von 10, 20, 30; sie sind es aber nicht von 5, 8, 20; wenn man immer die nemliche Ordnung beobachtet.

4.

Man nennt Machten einer Zahl die Zahlen, welche man erhält, wenn diese Zahl mit sich selbst ein,

*) der Uebers. behält sich vor, den Grund der Aufnahme neuer deutscher Ausdrücke bey einer andern Gelegenheit anzuführen.

ein, zwey, drey, vier mal, u. s. w. *multiplicirt wird. Man erhält nemlich die zwote Macht, die auch das Quadrat oder Viereck genannt wird, wenn eine Zahl einmal mit sich selbst multiplicirt wird: die dritte Macht, die auch Cubus oder Würfel genannt wird, wenn eine Zahl zweymal: die vierte Macht, wenn sie dreymal: die fünfte Macht, wenn sie viermal, u. s. w., mit sich selbst multiplicirt wird.*

Und umgekehrt: wenn man eine Zahl hat, nennt man Wurzeln derselben die Zahlen, welche, mit sich selbst multiplicirt, dieselbe geben, und zwar zwote Wurzel, die man auch Quadrat oder Vierecks-Wurzel nennt, dritte, die man auch Cubik oder Würfels-Wurzel nennt, vierte, fünfte u. s. Wurzel diejenige Zahlen, die ein, zwey, drey, vier mal mit sich selbst multiplicirt, die gegebene Zahl wieder geben.

Beysp. 4, 8, 16, 32 u. s. w. sind in dieser Ordnung die 2te, 3te, 4te, 5te Macht von 2: doch 5 ist die *zwote* oder *Quadrat*-Wurzel von 25: die *dritte* oder *Cubik*-Wurzel von 125: die *vierte* von 625: die *fünfte* von 3125 und so weiter.

1ste Anmerkung. Wir werden in N. 4. des 8ten Corollariums vom 7ten Lehrsatze im 4ten Buche und im 2ten Corollarium des 11ten Lehrsatzes im 11ten Buche sehen, warum die zwoten und dritten Machten auch *Quadrate* oder *Vierecke* und *Cuben* oder *Würfel* genannt werden.

2*te Anmerkung.* Man kann *erste* Macht einer Zahl diese Zahl selbst, das heisst, diese Zahl mit *eins* vervielfältiget, nennen: und wenn man dies angenommen hat; so wird man, anstatt dafs man die Machten durch die Multiplikation selbst ausdruckt, wie z. B. durch a + 1, axa, axaxa, axaxaxa, welches beschwerlich ist, sie durch einen *Exponenten* oder *Anzeiger* angeben können, der zu erkennen giebt, wie vielmal diese Zahl gesetzt wird, und daher welche *Macht* es ist, nemlich

a^1, a^2, a^3, a^4, a^5 u. s. w. bezeichnen die erste, zwote, dritte, vierte, fünfte Macht.

Eben so kann man die Wurzeln mit einem Zeichen ($\sqrt{}$) angeben, und indem man eine Ziffer hineinsetzt, zu erkennen geben, die wie vielste Wurzel es sey: daher sind $\sqrt[2]{a}$, oder, wie man auch schreibt: nur $\sqrt{a}$, $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[4]{a}$, $\sqrt[5]{a}$, u. s. w. die zwote, dritte, vierte, fünfte Wurzel von a, u. s. w.; daher ist $4 = \sqrt[3]{64}$, weil 4, zweymal mit sich selbst vervielfältiget, oder die dritte Macht von 4 gerade 64 giebt.

3*te Anmerkung.* Hieraus folgt 1stens; dafs, wenn man Machten von einer Zahl mit Machten von der nemlichen Zahl multiplicirt, oder dividirt, der *Anzeiger* des *Produktes*, oder des *Quotienten* die *Summe* oder der *Unterschied* der Anzeiger seyn wird. 2tens; dafs man die Division mit einem Anzeiger durch das Zeichen (—) *minus*, zur Bezeichnung vom

Ab-

Abziehen wird angeben können: wie z. B. $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{a^3}$ u. s. w. durch a^{-1}, a^{-2}, a^{-3}, u. s. w.; 3*tens* daſs man die Wurzeln nicht allein durch die Zeichen $\sqrt{}$, $\sqrt[3]{}$, $\sqrt[4]{}$ u. s. w. sondern auch durch gebrochene Anzeiger $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, u. s. w. wird anweisen können. Z. B. $\sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}}$; denn a oder $1^1 = \sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}} \times a^{\frac{1}{3}} \times a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}} = a^1 = a$; 4*tens* daſs die Macht *Null* einer Zahl immer die *Einheit* iſt; denn $1 = \frac{a}{a} = a^{1-1} = a^0$; ſo daſs man immer anſtatt 1 die Macht Null, von welcher Gröſse man wolle, ſetzen kann.

4te Anmerkung. Ich gebrauche hier das Wort *Zahl* und nicht *Größe*, weil die Machten in einer weſentlichen Vervielfaltigung beſtehen, und daher im eigentlichen Sinne nur auf Zahlen angewandt werden können: man kann zwar ſagen: 4 multiplicirt mit 4, und man kann dieſe Zahl angeben; allein man kann keine Linie mit einer Linie, keinen Cirkel mit einem Cirkel multipliciren: und wenn man bisweilen von der Multiplication zwoer Linien, u. ſ. w. ſpricht, oder ſie durch das Zeichen x angiebt, geſchieht dies nur Kürze halber: und bezeichnet immer ſtillſchweigend die Zahl, welche z. B. die Gröſse einer Linie oder eines Cirkels ausdrückt, multiplicirt mit der Zahl, wodurch die Gröſse einer anderen Linie oder eines andern Cirkels ausgedrückt wird.

5.

Man nennt gleichartige *Größen die, welche so beschaffen sind, daſs ein Vielfaches von der kleinsten der gröſten gleichkommen oder sie übertreffen kann, oder auch* Größen, *welche aus der nehmlichen Art Einheiten bestehen.*

Beispiel. Linien ſind unter einander gleichartig: Parallelogramme ſind es auch unter einander: Ein Weinfaſs von etlichen Eimern iſt mit einem Eimer, oder einem Nöſsel gleichartig, weil etliche Eimer oder eine Menge von Nöſseln ein Faſs von etlichen Eimern geben können. Eine Linie aber, ein Parallelogram, ein Faſs von etlichen Eimern u. ſ. w. ſind ungleichartig unter einander.

6.

Man heißt meßbare oder auch rationelle *Größen, oder Zahlen diejenige, die ein gemeinſchaftliches Maaß haben: die kleinſte möge nun das Maaß der größten, das heißt, ſie möge gerade einige mal in derſelben enthalten ſeyn, oder in ihr aufgehen; oder es möge eine dritte Größe das Maaß, oder ein Theil von beyden ſeyn.*

Eucl. 10. 1ſte Def.

Ich ſpreche hier von *Größen* und nicht bloſs von Zahlen, weil die Behauptung auf alle Gröſsen angewandt werden kann. Eine Unze, ein Pfund, ein Schiff-Pfund *) ſind meſsbare Gröſsen. Eben ſo ſind

*) Ein Schiff-Pfund macht 300 Pfund.

ſind es auch ein Eimer, ein Ahm und ein Nöſel *).

2tes *Corollarium.*

Alle Brüche ſind **unter einander meßbar**; *denn man hat nur nöthig, ſie auf den nemlichen Nenner zu bringen.* **)

3tes *Corollarium.*

In allen Zahlen, ſie mögen ſeyn, welche ſie wollen, iſt die **Einheit**, *ſie ſey eine* **wahre** *oder eine* **relative** (**beziehende**), *das gemeinſchaftliche Maaß.*

Anmerkung. Die wahre Einheit hat dann nur Statt, wenn man die Zahlen abſtrakt (abgezogen) betrachtet, ohne ſie auf etwas anzuwenden, wann ich ſage, 100, 1000, u. ſ. w.; wann ich

*) Ich nahm mir hier die Freiheit, für ein Beyſpiel, das nur die verſtehen, die die Holländiſche Weinrechnung kennen, ein allgemeiner verſtändliches Beiſpiel zu geben. *Der Ueb.*

**) Ich habe hier mit Abſicht auf die Worte: *unter einander meſsbar* aufmerkſam gemacht. Denn es wird dabey *nur* dies gemeint, daſs die Brüche auf eine gemeinſchaftliche Benennung gebracht wordeu ſeyn. Wer den Satz anders verſtehen möchte, leſe den Beweis des de la Caille zu ſeinem 3ten Lehrſatze §. 186. in deſſen Leçons élémentaires de Mathématiques ou Elémens d' Algèbre et de Géometrie. A Paris. M.DCC LXIV. und mache die nöthige Folgerung daraus. *Der Ueb.*

ich aber ſage: 100 Eimer, 20 Ruthen, 20 Fuſse, 20 Quadrat-Ruthen u. ſ. w. ſehe ich auf eine beziehende Einheit, nemlich auf einen Eimer, eine Ruthe, einen Fuſs, ein Quadrat, deſſen Seiten eine Ruthe ſind: und die Zahlen: 20 Ruthen, 20 Fuſse, ſind ungleich groſs, wenn ſchon beide 20, d. h. wenn ſchon beyde gleich viele Einheiten enthalten; denn die Einheit von einer Ruthe iſt 12 mal gröſser, als die von einem Fuſse.

7.

Man heiſst unmeſsbare (auch irrationelle, oder ſurde) Gröſsen diejenige, welche kein gemeinſchaftliches Maaſs haben, das heiſst, deren eine weder durch die Vervielfältigung der andern, noch durch die eines aufſteigenden Theils von dieſer gebildet werden kann.

Eucl. 10, 2te Def.

1ſte Anmerk. Ich rede von Gröſsen und nicht von Zahlen: denn eigentlich geſprochen, ſind nur allein die Gröſsen unmeſsbar, wie z. B. die Diagonale eines Vierecks und ſeiner Seite, der Durchmeſſer eines Cirkels und ſein Umkreis verſchiedene Arten von Rechtecken u. ſ. w., wie aus dem 4ten, 6ten, 7ten, und 8ten Buche erhellen wird. Dieſe Gröſsen können, wenn ſie ſchon unter einander unmeſsbar ſind, Statt finden und angewieſen werden. *Unmeſsbare Zahlen* giebt es *im eigentlichen Sinne* nicht; denn, wer eine Zahl nennt, nennt eine Anzahl Einheiten, und daher Etwas, das durch die Einheit

heit meſsbar iſt. Man bedient ſich zwar auch des Ausdrucks: *unmeſsbar*, wenn man von Zahlen ſpricht; dies geſchieht aber in einem uneigentlichen Sinne, und der Kürze zu lieb. Eine Wurzel von einer ganzen Zahl, welche ſelbſt keine ganze Zahl iſt, kann zum Beiſpiel durch einen Bruch eben ſo wenig, als durch eine ganze Zahl, das heiſst, ſie kann durch keine Zahl, welche dieſelbe auch ſey, ausgedrückt werden. Es giebt z. B. keine ganze Zahl, und auch keinen Bruch, der, mit ſich ſelbſt multiplicirt, 8, oder, mit ſich ſelbſt zweymal vervielfältiget, 36 geben kann; und daher kann die Quadrat-Wurzel von 8, oder die Cubic-Wurzel von 36 durch keine Zahl, welche dieſelbe auch ſey, ausgedrückt werden; und deswegen nennt man dieſe Wurzeln unmeſsbar. Wenn man ſie dennoch durch ein Zeichen $\sqrt{8}$, $\sqrt[3]{36}$ anweist; ſo handelt man damit, wie wenn es Zahlen wären, und man nennt ſie darum *unmeſsbare Zahlen*, jedoch ſehr uneigentlich. Man kann dieſe Wurzeln wohl anzeigen. Man kann die Erſtere wohl durch eine Linie ausdrücken (namentlich durch die Diagonale eines Rechtecks, deſſen eine Seite 2, und die andere Seite 2 iſt); aber nicht durch eine Zahl. Man kann zwar eine Zahl finden, die ihr je länger je näher kömmt, die aber ſo wenig, als man will, von ihr unterſchieden iſt; allein niemals eine Zahl, die dieſer Wurzel gerade gleich kömmt.

Wenn man alſo von unmeſsbaren Zahlen ſpricht; ſo giebt man ſie durch ein Zeichen an,

und ſpricht nicht davon, was ſie ſind, denn ſie finden*) nicht Statt; ſondern davon, was ſie ſeyn ſollten, wenn man ſie durch Zahlen ausdrücken könnte; welches unmöglich iſt.

2te Anmerk. Wir haben in der vorhergehenden Anmerkung geſagt, daſs man die Wurzeln von Zahlen, wenn ſie keine ganze Zahlen ſeyn, durch keine ganze Zahl, welche ſie auch ſey, ausdrücken könne, und daſs daher dieſe Wurzeln, in Rückſicht dieſer gemeldten Zahlen, ganz *unmeſsbar* ſeyn. Man kann daher dieſe Wurzeln weder mit einer ganzen Zahl, noch mit einem Bruche, und darum mit keiner Zahl, welche ſie auch ſey, ausdrücken.

Wir haben ebenfalls geſagt, daſs die Diagonale und die Seite eines Vierecks unmeſsbar ſeyn: dies ergiebt ſich aus 2, 7. und 4, 7. 8tem Corollarium No. 4.; denn A^2 ſey dieſe Zahl, und a ſey eine Zahl, deren Quadrat a^2 gerade kleiner, als A^2, doch ſo beſchaffen ſey, daſs das Viereck von $\overline{a + 1}$ gerade gröſser, ſey. Demnach iſt die Wurzel von A^2 gröſser als a, aber kleiner als $a + 1$ und daher a mit einem Bruche. Nimm an, ſie ſey $a + \frac{1}{n}$. Wenn man dieſe Zahl mit ſich ſelbſt multiplicirt, erhält man

*) want zy zyn er niet, es ſind (eigentlich) keine bloſse Zahlen, ſie ſind eigentlich nicht als Zahlen zu betrachten. Indeſſen ſieht man aus dieſer ganzen Anmerkung, daſs es dem Herrn Verf. recht ſehr um Deutlichkeit zu thun geweſen iſt. *Der Ueberſ.*

man ihr Quadrat *): $a^2 + \frac{2a}{n} + (\frac{1}{n})^2 = A^2$, und da A^2 eine ganze Zahl ist, muss es auch $a^2 + \frac{2a}{n} + (\frac{1}{n})^2$ seyn. Der Theil a^2 ist es; der Theil $\frac{2a}{n}$ kann es seyn; Man nehme dies an. Allein $\frac{1}{n^2}$ bleibt immer ein Bruch, und daher die ganze Summe ein Bruch. Nimm an, $\frac{2a}{n}$ sey ein Bruch; so wird $\frac{2a}{n} + (\frac{1}{n})^2$ oder $\frac{1}{n} x$ $(2a + \frac{1}{n})$ dennoch ein Bruch bleiben; daher ist immer das Viereck $a^2 + \frac{2a}{n} + \frac{1}{n^2}$ ein Bruch, da es, wenn $a + \frac{1}{n}$ die Wurzel von A^2 wäre, eine ganze Zahl seyn müsste; daher ist dieses die wahre Wurzel von A^2 nicht. Mit andern Worten: Wenn ein wahrer, oder ein uneigentlicher Bruch, wenn man ihn ein oder mehreremal mit sich selbst multiplicirt, nicht aufgeht; so werden die Produkte immer Brüche seyn, die nicht aufgehen und welche daher nicht auf ganze Zahlen gebracht werden können. Wenn man z. B. $\frac{7}{5}$ mit $\frac{7}{5}$ multiplicirt, kommt $\frac{49}{25}$ heraus, ebenfalls ein Bruch, welcher nicht aufgeht. Das Nehmliche findet Statt für $\frac{7}{5} x \frac{7}{5} x \frac{7}{5} = \frac{343}{125}$, für $\frac{7}{5} x \frac{7}{5} x \frac{7}{5} x \frac{7}{5}$ u. s. w. Da nun alle Brüche auch Brüche zu Machten haben; so wird auch umgekehrt eine ganze Zahl keinen Bruch zur Wurzel haben können.

3*te Anmerkung.* Es giebt also Zahlen, deren Quadrat-Wurzeln und Zahlen, deren Cubik-Wur-

*) Sollte der Anfänger diese Anmerkung lesen und noch nicht wissen, wie man Grössen auf ihre Quadrate erhebe, der lese den Anhang zu diesem Buche. *Der Ueb.*

Wurzeln man in Zahlen ausdrücken kann. Es giebt aber auch andere Zahlen, bey denen dies unmöglich ist. Die erstern werden *Quadrat-* und *Cubik-Zahlen* genannt, wie sie Euclid in der 18ten und 19ten Definition seines 7ten Buches nennt. Die Wurzel selbst heisst *Seite.*

4te Anmerkung. Wenn nun A, und B, unter einander *unmeßbar* sind, und C ein gerader Theil von B ist, der mehrmal darein geht; so wird dieser Theil C, eine gewisse Anzahl mal (n), z. B. genommen, noch kleiner als A, doch einmal mehr, nemlich $\overline{n+1}$ mal genommen, grösser seyn, so dass da m C = B ist, man $nC < A$, $\overline{n+1}\,C > A$ haben wird, ohne dass es irgend eine Zahl giebt, welche durch ihre Vervielfältigung mit C der A gleich werden kann.

S. p. 205. 1ste Def.

8.

Wenn man zwo gleichartige Größen vergleicht, um die Größe der einen aus der andern unmittelbar zu bestimmen, heißt man es: ihr Verhältnis aufsuchen, und diese Bestimmung selbst ist das Verhältniss, in welchem die Größen unter einander, zu einander stehen.

Siehe vornemlich *König* zu der 3ten Def. des 5ten Buches von Euclid.

Anmer-

Anmerkung. Man kann die Grösen unter einander auf verschiedene Arten vergleichen, vorzüglich auf zwo Arten, deren die eine das *geometrische*, die andere das *arithmetische* Verhältniss aufsuchen genannt wird: woraus die *geometrischen* und *arithmetischen* Proportionen (oder Verhältniss-Gleichheiten) und aus diesen unter einander, doch auf zwo verschiedene Arten, die *Logarithmen* und die *Harmonische Verhältniß-Gleichheit* entspringen. Wir werden dieses Alles erklären.

1ste Abtheilung.

Ueber die Geometrische Verhältniss-Gleichheit.

Definitionen.

9.

Wenn man zwo gleichartige Größen mit einander vergleicht, um zu wissen, welches Vervielfältigte oder welches Vielfache die Eine von der Andern sey, oder, was auf das Nehmliche herauskömmt, wie vielmal die letztere in der ersteren enthalten, oder, der wie vielste Theil sie davon sey; so sagt man, dass man das ***geometrische Verhältniss****, oder auch, aus Vorzug, nur das* ***Verhältniss****, welches zwischen diesen Grösen Statt habe, aufsuche, so dass geometrisches*

sches Verhältniss, oder nur Verhältniss zwischen zwoen Grössen anzeigt, wie vielmal die Eine die Andere enthält.

Die Grössen, welche dieses Verhältniss unter einander angeben, werden die Glieder desselben genannt. Die Grösse, welche man zuerst nennt, wird das vorgehende, die andere das nachfolgende Glied genannt. Es giebt daher in jedem Verhältnisse ein vorgehendes und ein nachfolgendes Glied.

Siehe Tacquet zu den Definitionen des 5ten Buchs von *Euklid*. — W. a. §. 605, *) — St. p. 206. def. 4.

1stes Corollarium.

Es giebt keine Grössen, die, wenn sie gleichartig sind, nicht ein bestimmtes geometrisches Verhältniss zu einander haben.

2tes Corollarium.

Man theilt das geometrische Verhältniss in messbares und unmessbares Verhältniss ein. Ein Verhältniss ist messbar, wenn es durch Zahlen ausgedruckt wird, oder ausgedruckt werden kann, unmessbar aber, oder irrationell, wenn die Grössen, die man vergleicht, unter einander unmessbar sind, und folglich ihr Verhältniss durch keine Zahl ausgedrückt,

*) Vergl. nach der Quart-Ausgabe seiner Elementa Matheseos Universae vom Jahr 1730. Tom. 1. Arith. §. 126 et §. 136. die 39ste u. 42ste Dfienition: *Der Uebers.*

drückt werden kann. In dieſem Falle kann man das Verhältniſs nur durch ein Zeichen angeben, wie z. B. das Verhältniſs von $\sqrt{2}$ *zu* 1, *oder durch Linien. Man weiſs zwar alsdann nicht, wie vielmal die eine Gröſse in der andern enthalten ſey; man weiſs aber die äuſſerſten Gränzen, zwiſchen welche dieſe Zahl fällt, wie z. B. das Verhältniſs von* $\sqrt{2}$ *zu* 1 *z. B. gröſser, als* $1,\frac{41421}{100000}$, *jedoch kleiner als* $1,\frac{41422}{100000}$ *iſt.*

L. C. §. 288. *)

1ſte Anmerkung. Man muſs aber nicht denken, daſs, wenn man zwo unmeſsbare Gröſsen vergleicht, ihr Verhältniſs zu einander immer *unmeſsbar* ſey. Sie können ein meſsbares Verhältniſs zu einander haben, wenn gleich jede von ihnen in Rückſicht auf eine andere unmeſsbar iſt. Das Verhältniſs von $\sqrt{2}$ zur $\sqrt{8}$ z. B. iſt das von 1 zu 2 **), daher *meſsbar*, obſchon jede der Gröſsen an ſich ſelbſt in Beziehung auf die Einheit unmeſsbar iſt.

2te

*) Die nächſtfolgende Anmerkung iſt dieſelbe Behauptung, welche in dieſem 288ſten §. des de la Caille geleſen werden kann. Der Ueb. der zugleich den lieben Leſer bittet, ihm künftig zu verzeihen, wenn er ſich in den unten ſtehenden Anmerkungen nicht mehr als den Verfaſſer dieſer Noten nennen wird, da ſie alle von ihm, nicht von dem Herrn van Swinden, herrühren.

**) Für den Anfänger; die Quadrat-Wurzel aus 2 iſt, wie wir ſchon ſahen, 1,41421 – 1,41422; die von 8 wirſt du finden: 2,82842 — 2,82843.

2te Anmerkung. Euclid giebt folgende Definition vom Worte: Verhältniſs: „Verhältniſs," ſagt Er (in der 3ten Definition), „iſt die wechſelsweiſe Beziehung von *Vielfachheit*, die „zwo Gröſsen zu einander haben," und in der 4ten Definition fügt Er hinzu: „Von Gröſsen „wird geſagt, ſie ſtehen in einem Verhältniſſe „zuſammen, wenn die eine die andere vermöge der Vervielfaltigung *übertreffen* kann." Man gebe wohl Acht: Er ſagt nicht: *gleichkommen*; denn alsdann würde die Definition nur auf *meſsbare* Gröſsen bezogen werden können. Er ſpricht von: *übertreffen*, welches auch das *Unmeſsbare* in ſich begreift. Bey vielen Ueberſetzern lieſt man in der dritten Definiton: *Beziehung in Abſicht der Gröſse* *) (im Lateiniſchen: ſecundum quantitatem) anſtatt von *Vielfachheit* (ſecundum quantuplicitatem); doch dies würde ebenfalls auf die arithmetiſchen und geometriſchen Verhältniſſe bezogen werden können, welches die Abſicht Euclid's nicht war, wie es aus ſeinem 7ten Buche zur Genüge erhellet. Allein daſs man hier das griechiſche Wort *κατὰ πηλικότητα vermöge der Vielfachheit* überſetzen müſſe, lehren Wallis (Opera (Mathematica T. II. p. 666.) und Andere. Auch hat Gregory es alſo erklärt. Siehe auch König über dieſe Stelle.

10.

*) Betrekking van *hoegrootheid.* Ich möchte gerne einen einzelnen Ausdruck für meine Ueberſetzung dieſes Worts; ich finde ihn aber oder ich wage ihn nicht. Er iſt in der holländiſchen Sprache ſehr beſtimmend. Für das Wort veelvoudigheid erlaubte ich mir doch die Ueberſetzung: *Vielfachheit.*

10.

Man nennt ***Anzeiger*** *(****Exponenten****) einer Verhältniſs den Quotienten, der aus der Diviſion des vorhergehenden Gliedes durch das nachfolgende hervorkommt, oder von dem man verſteht, daſs er herkomme.*

W. a. §. 65. *) — H. a. §. 126. p. 207. 6te Def.

1ſte Anmerkung. Da die *Verhältniſs* von zwoen Gröſsen anzeigt, wie vielmal die eine in der andern enthalten ſey, und der *Quotient* einer Diviſion dies auch thut; ſo iſt dieſer *Quotient* in der That der wahre Anzeiger dieſe Verhältniſs und dies zwar immer ſtillſchweigend mit Beziehung auf die Einheit, die zum Grund gelegt iſt.

2te Anmerkung. Es giebt Schriftſteller, welche *Anzeiger* oder *Quotienten* denjenigen Quotienten nennen, der aus der Diviſion nicht des *vorgehenden Gliedes* durch das *nachfolgende*, ſondern des *nachfolgenden* durch das *vorhergehende* hervorkommt. Doch dies kommt auf daſſelbe heraus, wenn man nur in den Sätzen und Beweiſen das Wort *Anzeiger* oder *Quotient* immer im nemlichen Sinne nimmt.

3te

*) Dieſe Definition findet ſich im gröſsern Werke des unſterblichen Mannes in deſſen bereits zur deutlichern Einſicht angezeigten 135ſten §en der Arithmetik.

3te *Anmerkung.* Tacquet heiſst *Nenner*, was wir *Anzeiger* heiſsen. Siehe deſſen 5tes Buch 3ten Theil, §§ 2. 3.

Corollarium.

Wenn das vorgehende Glied gröſser, als das nachfolgende iſt; ſo iſt der Anzeiger eine ganze Zahl, oder eine ganze Zahl nebſt einem Bruche. Wenn das vorgehende Glied kleiner iſt; ſo iſt der Anzeiger ein wahrer (eigentlicher) Bruch. Wenn der Anzeiger meſsbar iſt; ſo iſt die Verhältniſs meſsbar; wenn er aber unmeſsbar iſt; ſo iſt die Verhältniſs unmeſsbar; und umgekehrt.

4te *Anmerk.* Wenn der Anzeiger unmeſsbar iſt; ſo kann er durch keine Zahl ausgedrückt, ſondern nur durch ein Zeichen angegeben, oder durch Linien ausgedrückt werden, wie z. B. $\frac{1}{\sqrt{2}} : \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}}$; und hierin liegt der Grund, warum wir in der Definition geſagt haben: „*hervorkömmt, oder, von dem man verſteht, daſs er hervorkomme.*"

5te *Anmerk.* Die Verhältniſs wird in dem Worte ausgedrückt: A *zu* B, und anſtatt des Worts *zu*, bedient man ſich des Zeichen (:) oder (,). Man ſchreibt z. B. A:B, oder A,B, auch nach *Leibnitzen* mit dem Zeichen der *Diviſion*, nemlich einem Striche $\frac{A}{B}$. Da auch die Verhältniſs anzeigt, wie vielmal die eine Gröſse die andere enthalte, ſo beſteht es wirklich in

in einer Diviſion, und wird durch das Bewerkſtelligen dieſer Diviſion bekannt.

11.

Zwey Verhältniſſe werden gleich, oder die nemlichen genannt, wenn ihre Anzeiger gleich groß ſind. Von zweyen Verhältniſſen aber iſt die gröſte dasjenige, deren Anzeiger der gröſte iſt, oder, was daſſelbe iſt: Eine Verhältniſs iſt gleich groß, größer, oder kleiner, als ein anderes, je nachdem ihr Anzeiger gleich groſs, gröſser, oder kleiner iſt, als der der zweyten Verhältniß. Wenn nun verſchiedene Gröſsen unter einander die nemliche Verhältniſs haben; ſo ſagt man, daſs ſie proportional (Verhältniſs-gleich) ſeyen, und die Verhältniſs-Gleichheit (Proportion) findet Statt, wenn eine Gleichheit von Verhältniſſen Statt findet.

W. a. §. 66. S. p. 207. def. 8. 9. p. 215. def. 20.

1ſte Anmerkung. Die Verhältniſs-Gleichheit wurde ehemals meiſtens durch vier Punkte (: :), nemlich auf folgende Art ausgedrückt:

A: B :: C: D oder

A, B :: C, D.

Allein da die Verhältniſs-Gleichheit wirklich eine Gleichheit von zweyen *Verhältniſſen*, und daher von *Quotienten* iſt, welche aus zwoen Diviſionen entſprungen ſind; ſo wird ſie, mit *Leibnitzen*, viel beſſer und natürlicher auf dieſe Weiſe:

$$A : B = C : D; \text{ oder}$$
$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \text{ ausgedrückt.}$$

2te Anmerkung. Wenn die beyden Verhältnisse messbar sind: so ist es leicht, über ihre Gleichheit oder Ungleichheit ein Urtheil zu fällen; dies geschicht allein nach dem Anzeiger. Man wird aber fragen: wie man über die Gleichheit oder Ungleicheit zweyer unmessbaren Verhältnisse urtheile? da keine von beyden durch Zahlen ausgedrückt werden kann, und daher keine von beyden genau und in der That bekannt ist.

Man urtheilt hierüber auf zwo verschiedene Arten: zuerst, da die unmessbaren Verhältnisse durch Zeichen, oder durch Linien ausgedrückt werden können (7te Def. 1ste Anm.*) so urtheilt man, dass sie gleich seyen, wenn sie das nemliche Zeichen zum Anzeiger haben, oder durch die nemlichen Linien ausgedruckt werden. **) Es giebt aber eine zwote Weise, welche allgemeiner ist, und sowohl auf messbare als unmessbare Grössen angewandt werden kann. Wenn man zwey Verhältnisse, z. B. A : B, und C : D hat; so wird man für ausgemacht annehmen dürfen, dass die Verhält-

*) S. auch 10te Def. 4te Anmerkung.

**) Ich lasse hier die Beyspiele aus der Uebersetzung weg, da sie nicht richtig sind, und ein jeder sie sich selbst dabey denken wird.

hältniſs von A zu B der von C zu D gleich iſt, wenn man beweiſen kann, daſs ſie weder kleiner noch gröſser ſeyn kann, oder, was auf das Nemliche herauskömmt, wenn man beweiſen kann, daſs man ſich Ungereimtheiten ſchuldig macht, wenn man annimmt, daſs ſie ungleich ſeyen, oder daſs die eine Verhältniſs gröſser oder kleiner, als die andere ſey: Eine nach meinem Urtheile, vorzügliche Art von Beweiſen.

1ſtes Corollarium.

Wenn vier Gröſsen proportionirt, und die erſte und zweyte untereinander meſsbar ſind; ſo ſind die dritte und vierte ebenfalls unter einander meſsbar; doch wenn die erſte und zweyte unter einander unmeſsbar ſind, ſo ſind die dritte und vierte auch unter einander unmeſsbar.

Beweis. Wenn $A : B = C : D$; ſo iſt $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$; und wenn daher $\frac{A}{B}$ eine Zahl iſt; ſo muſs $\frac{C}{D}$ auch eine ſeyn; und wenn $\frac{A}{B}$ keine Zahl und daher unmeſsbar iſt; ſo muſs $\frac{C}{D}$ dies auch ſeyn.

3*te Anmerkung.* Dieſes Corollarium iſt der 10te Lehrſatz des 10ten Buchs von Euclid. Man richte ſeine Aufmerkſamkeit beſonders auch darauf, daſs ich ſage: die erſte und zwo-

 te,

te, die dritte und vierte Gröſse ſind *untereinander unmeſsbar*, das heiſst, ihre Verhältniſs iſt unmeſsbar; denn wir haben bereits geſagt (Def. 9. 1ſte Anm.), daſs unmeſsbare Gröſsen eine meſsbares Verhältniſs haben können, daſs z. B. $\sqrt{2} : \sqrt{8} = 1 : 2$. ſeyn. Wir betrachten daher die *unmeſsbaren* Gröſsen nicht an und für ſich ſelbſt (das heiſst in Beziehung auf die Einheit), ſondern in Beziehung auf einander, *unter einander*, das heiſst, ihre Verhältniſs.

4te Anmerkung. Euklid hat zwo Definitionen von *Gleichheit* der Verhältniſſe gegeben. Die eine iſt die 20ſte *) Definition des 7ten Buches, wo Er ſagt: „Zahlen ſind proportio„nirt, wenn die erſte ein Gleichvielfaches, oder „ein gleicher Theil der zwoten, ſo wie die „dritte es von der vierten iſt.“

Die andere, welche nicht nur auf Zahlen, ſondern auf alle, auch auf die unmeſsbaren Gröſsen, anwendbar iſt, iſt die 5te Definition des 5ten Buchs, und läuft hierauf hinaus: „Wenn vier Gröſsen gegeben ſind, und man „Gleichvervielfaltigte oder Gleichvielfache von „der erſten und dritten, und andere Gleich-

„viel-

*) Αριθμοὶ ἀναλογόν εἰσιν, ὅταν ὁ πρῶτος τȣ̃ δευτέρȣ καὶ ὁ τρίτος τȣ̃ τετάρτȣ ἰσακις ᾗ πολλαπλάσιος, ἢ τὸ αὐτὸ μέρος, ἢ τὰ αὐτὰ μέρη ὦσιν. Vid. Editio: Euclidis Elementorum libri XV. graece et latine. Coloniae, apud Maternum Cholinum M. D. LXIV.

„vielfache von der zwoten und vierten nimmt; „ſo werden dieſe Gröſsen in der nemlichen „Verhältniſs, nemlich die erſte zu der zwoten „die dritte zu der vierten ſtehen, nachdem, „wenn das Gleichvielfache der erſten gleich „groſs, gröſser, oder kleiner iſt, als das der „zwoten, das Gleichvielfache der dritten zu„gleich auch gleich groſs, gröſser, oder kleiner „iſt, als das der vierten, und dies immer, und „nach welcher Vervielfältigung man auch wol„le, wozu Euclid fügt: Gröſsen, die in der „nemlichen Verhältniſs ſtehen, heiſsen *) pro„portionirt."

Zum Beyſpiel: Wenn A, B, C, D, gegeben ſind und man die Gleichvielfache mA und mC nimmt, eben ſo die Gleichvielfache nB und nD; ſo wird $A:B = C:D$ ſeyn, wenn, nachdem $mA > nB$ iſt, auch $mC > nD$ iſt; und wenn $mA < nB$ iſt, auch $mC < nD$ iſt; und wenn $mA = nB$ iſt, auch $mC = nD$ iſt, welche Zahlen man auch für m und n nehme.

Dieſe Definition Euklids iſt allgemein, und begreift ſo wohl die *meſsbaren*, als die *unmeſsbaren* Gröſsen; doch iſt ſie nicht ganz deutlich und vollkommen, und iſt nicht aus der wahren und einfachen Natur deſſen, was man urſprünglich unter *Verhältniſs* verſteht, geſchöpft. Siehe *König* bey dieſer Stelle. Die Lehre von dem *Anzeigern*, die entweder *meſsbar* oder *unmeſsbar* ſind, iſt leichter, und eben

*) καλεισθω.

so allgemein, als die, welche Euklid vorträgt. Wir werden jedoch in dem 1sten, 2ten, und 3ten Lehrsatze zeigen, dass die Definition Euklids aus der unsrigen, und die unsrige aus der Euclids folgt.

5te Anmerk. Aus dem nemlichen Grunde giebt Euklid folgende Erklärung von ungleichen Verhältnissen: „wenn man Gleichvielfache von der ersten und dritten Grösse, und „andere Gleichvielfache von der zwoten und „vierten genommen hat, und wenn alsdann „das Gleichvielfache der ersten das der zwo„ten übertrifft, ohne dass das Gleichvielfache „der dritten das der vierten übertreffe, so wird „die erste Grösse zu der zwoten eine grössere „Verhältniss haben, als die dritte zu der vier„ten."

2tes Corollarium

Alle Brüche, und alle Produkte oder Zahlen, welche aus Vervielfältigung oder Multiplication entstanden sind, sind Verhältnisse; denn nimm an: $\frac{A}{B} = g$, *und* D x E = C; *so findet dies nemliche Verhältniss zwischen* A *und* B *Statt, welche zwischen* g *und der Einheit Statt hat. Auch zwischen* E *und der Einheit ist dieselbe Verhältniss, welche zwischen* C *und* D *ist.*

6te Anmerk. Die Erklärungen, welche man in den meisten Rechenbüchern vom *Multipliciren* und *Dividiren* giebt, sind sehr mangelhaft. Genau

nau gesprochen, bestehet die Multiplication im Finden einer Zahl, welche zu der einen der gegebenen sich verhält, wie die andere zur Einheit: und die Division bestehet in dem Finden einer Zahl, welche sich zu der Einheit verhält, wie die Zahl, die *dividirt* werden muss, zu dem *Divisor* oder Theiler.

Siehe hierüber *König* zu Euclid's 5ten Buche, 1ste 2te Deff. — H. a. §. 127. — L. C. §. 287. — Doch hauptsächlich *D'Alembert Melanges*. v. p. 217.

3tes *Corollarium*.

Die Proportion (Verhältnifs-Gleichheit) erfordert wenigstens drey Grössen.

Eucl. 5ten Buches 9te Definition.

7te Anmerk. Man missbraucht im gewöhnlichen Leben das Wort *Proportion* beständig, indem man es beynahe immer mit dem Worte *Verhältnifs* verwechselt und sagt: die Proportion von A zu B. dies ist ein Irrthum. Es giebt keine Proportion oder Verhältnifs-Gleichheit zwischen zwoen Grössen; sondern zwo Grössen haben eine bestimmte *Verhältnifs* zu einander, und dann erst entsteht eine *Proportion* oder *Verhältnifs-Gleichheit*, wenn man zwo *Verhältnisse*, die gleich sind, mit einander vergleicht, sie mögen nun aus dreyen, oder vier Grössen bestehen. Im ersten

Falle ist A : B = B : C, oder $\frac{A}{B} = \frac{B}{C}$; und im zweyten A : B = C : D, oder $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$.

12.

Wenn alle die Grössen, die gleiche Verhältnisse zu einander haben, verschieden von einander sind; so sagt man von ihnen, sie seyen in ihrem Unterschiede (discrete, unzusammenhängend) proportionell; doch wenn diese Grossen so gesetzt sind, daß immer eine von der vorhergehenden Verhältniß in dem nachfolgenden wiederholt wird, das heißt, daß die nachfolgende Grösse in der ersten Verhältniß die vorgehende in der zweyten, die nachfolgende in der zweyten, die vorgehende in der dritten ist, und so immer fort; so sagt man, daß diese Grössen beständig (continue, zusammenhängend, stetig) proportionell seyn; und diese zusammenhängende Verhältniß Gleichheit wird eine geometrische Reihe oder Progression genannt, worin man gleich weit entfernte Glieder diejenigen Glieder nennt, die von einem bestimmten Gliede durch eine gleich große Anzahl von Gliedern getrennt werden.

A, B, C, D, E, F, G, H sind zusammenhängend proportionell, oder machen eine geometrische Reihe aus, wenn $\frac{A}{B} = \frac{B}{C} = \frac{C}{D} = \frac{D}{E} = \frac{E}{F} = \frac{F}{G}$ u. s. w. oder wenn A : B = B : C = C : D = D : E = E : F = F : G und s. w.

W.

W. a. §. 69. *) — H. a. §. 121. — St. p. 208. d. 12, p. 215. def. 21.

Corollarium.

Deswegen ſagt man, daſs Zahlen oder Gröſſen, die ſtetig proportionell ſind, eine geometriſche Reihe ausmachen. Dieſe Reihe wird eine zunehmende, auch aufſteigende, oder eine abnehmende, auch ablaufende, oder niederſteigende genannt, je nachdem die Glieder beſtändig ſich vermehren oder vermindern.

Anmerkung. Eine geometriſche Reihe, oder ſtetige Verhältniſs-Gleichheit wird mit vier Punkten und einer Linie dazwiſchen, auf dieſe Art: ∻ angezeigt. Z. B. ∻ A, B, C, D, E u. ſ. w.

13.

Wenn drey Gröſſen ſtetig proportionell ſind; ſo nennt man die zwote oder mittelſte die mittelſte proportionale; und die letzte, die dritte proportionale, und wenn vier Gröſsen unzuſammenhängend proportional ſind; ſo nennt man die vierte oder letzte die vierte proportionale. In dieſem Falle werden auch die erſte vorgehende, und die letzte nachfolgende Gröſſe die äuſſerſten Glieder: die erſte nachfolgende, und die zwote vorgehende, die mittelſten Glieder genannt.

S. p. 209. dd. 13, 14.

*) In ſeinem lat. Werke §. 156. Def. 50.

14.

Die vorgehenden werden in Beziehung auf die vorgehenden, und die nachfolgenden in Beziehung auf die nachfolgenden, gleichnamige (ähnlich liegende, homologa) Glieder genannt.

Eucl. 5. Def. 12.

15.

Wenn man vier Grössen hat, und man ihre Verhältniss in Beziehung auf die Ordnung, in der man sie anführt, betrachtet; so sagt man, dass sie in gerader Richtung (Folge, directe), zu einander, oder in gerader Verhältniss stehen, wenn die erste sich zu der zwoten, wie die dritte zu der vierten, verhält; oder mit andern Worten: wenn die Verhältniß der ersten zu der zwoten der Verhältniss der dritten zu der vierten gleich ist. Man sagt aber, daß sie umgekehrt (inverse) sich zu einander verhalten, oder in umgekehrter Verhältniss stehen, wenn die erste zu der zwoten, wie die vierte zu der dritten; oder die zwote zu der ersten, wie die dritte zu der vierten, sich verhält.

L. C. §. 263. — St. p. 234. d. 23.

Corollarium.

Hieraus ergiebt sich, daß die umgekehrte Verhältniß zwoer Grössen gefunden wird, wenn man die nachfolgende Grösse mit der vorgehenden, anstatt die vorgehende mit der nachfolgenden zu theilen,

theilen, dividirt. $\frac{A}{B}$ *ist die umgekehrte Verhältniß von* $\frac{B}{A}$; $\frac{1}{B}$ *ist die umgekehrte Verhältniß von* B : 1.

L. C. §. 299.

16.

Man nennt eine zusammengesetzte Verhältniß diejenige Verhältniſs, welche aus verschiedenen andern Verhältnissen, und zwar durch Vervielfältigung der einzelnen Verhältnisse (die man in diesem Falle auch Faktoren und Wurzeln nennt), gebildet wird. Wenn alle Wurzeln in gerader Richtung genommen werden; so ist die zusammengesetzte Verhältniß eine direkte Verhältniß aus allen. Werden sie alle umgekehrt genommen; so ist die zusammengesetzte Verhältniß eine umgekehrte zusammengesetzte Verhältniß der Wurzeln. Und wenn einige Wurzeln in gerader Folge, andere in einer umgekehrten genommen werden; so wird die zusammengesetzte Verhältniſs aus direkten und umgekehrten Verhältnissen gebildet.

Beispiel. Wenn man die Verhältnisse $\frac{A}{B}, \frac{C}{D}, \frac{E}{F}$ $\frac{G}{I}$ hat; so ist die Verhältniſs von P : Q. aus denen von $\frac{A}{B}, \frac{C}{D}, \frac{E}{F}$ u. s. w. zusammengesetzt, in sofern $\frac{P}{Q} = \frac{A}{B} \times \frac{C}{D} \times \frac{E}{F}$ u. s. w. So ist die von $\frac{21}{27}$ aus $\frac{3}{9}$ und

und $\frac{7}{3}$ zusammengesetzt. Die Verhältniss von R : S ist die aus $\frac{A}{B}$ und $\frac{C}{D}$ umgekehrte zusammengesetzte Verhältniss in so fern $\frac{R}{S} = \frac{B}{A} \times \frac{D}{C} = \frac{1}{\frac{AC}{BD}}$. So ist $\frac{27}{21}$ aus $\frac{3}{9}$ und $\frac{7}{3}$ umgekehrt zusammengesetzt. Die Verhältniss von T : U ist aus der directen von $\frac{A}{B}$ und der umgekehrten von $\frac{C}{D}$ zusammengesetzt, in so fern $\frac{T}{U} = \frac{A}{B} \times \frac{D}{C}$. So ist $\frac{8}{27}$ in gerader Folge aus $\frac{4}{9}$ und in umgekehrter aus $\frac{3}{2}$ zusammengesetzt.

L. C. §. 290. St. p. 245. def. 5.

Anmerkung. Euclid spricht in seinem 5ten Buche gar nicht von dieser Zusammensetzung von Verhältnissen. Jedoch giebt er in dem 6ten Buche folgende Erklärung davon: „Eine „Verhältniss wird aus Verhältnissen zusammen„gesetzt, wenn die Anzeiger dieser Verhältnis„se oder ihre Wievielheiten *) mit einander „multiplicirt worden sind, und den Anzeiger „oder die Wievielheit dieses Verhältnisses ge„ben,

*) hoeveelheeden steht im Texte der Grondbeginsels.

„ben.“ *) Siehe hierüber Wallis de compofitione rationum, in feinen: opera Mathem. II, p. 666.

17.

Wenn eine Verhältniß aus gleichen Verhältniſſen zuſammengeſetzt iſt; ſo wird ſie eine zweyfache (doppelte), dreyfache, vierfache u. ſ. w. Verhältniſs genannt, je nachdem ſie aus zwoen, dreyen, vieren gleichen Verhältniſſen zuſammengeſetzt iſt. Sie iſt (4te Def.) *die zwote, dritte, vierte u. ſ. w. Macht jeder dieſer gleichen Verhältniſſe.*

$\frac{A \times A}{B \times B}$ *oder* $\frac{A^2}{B^2}$; *oder* $\frac{A \times A \times A}{B \times B \times B}$ *oder* $\frac{A^3}{B^3}$; $\frac{A \times A \times A \times A}{B \times B \times B \times B}$ *oder* $\frac{A^4}{B^4}$ *ſind die doppelten* (*zweyfachen*) *dreyfachen, vierfachen Verhältniſſe von* $\frac{A}{B}$.

H. a. §. 130. — L. C. §. 291.

Anmerk. Da die Erklärungen, welche Euklid von *doppelten* (*zweyfachen*), *dreyfachen* Verhältnifs u. f. w. gegeben hat, aus andern Grundfätzen abgeleitet find; fo müffen wir fie unterfuchen, befonders da diefe Definitionen in der Folge von einigem Einflufs feyn konnen.

Die

*) Λόγος ἐκ λόγων συγκεῖσθαι λέγεται, ὅταν αἱ τῶν λόγων πηλικότητες ἐφ' ἑαυτὰς πολλαπλασιασθεῖσαι ποιῶσί τινα λόγον.

Die 10te und 11te Definition des 5ten Buches sind folgende:

„Wenn drey Gröſsen proportionell (das heiſst, „ſtetig proportionell) ſind; ſo ſagt man, die „erſte ſtehe zur dritten in einer zwofachen Ver-„hältniſs von derjenigen, welche ſie zu der zwo-„ten habe."

„Wenn vier Gröſsen proportionell (das heiſst, „ſtetig proportionell) ſind; ſo ſagt man, die „erſte ſtehe zu der vierten in einem dreyfachen „Verhältniſs von derjenigen, welche ſie zur „zwoten habe: und ſo fort (*), ſo lange die „Verhältniſs-Gleichheit währt."

Wenn ich daher ſage, die Verhältniſs $\frac{P}{Q}$ ſey die doppelte von $\frac{A}{B}$; ſo heiſst dies, nach unſerem Sinne, dieſe Verhältniſs werde aus der Vervielfältigung der Verhältniſs $\frac{A}{B}$ mit ſich ſelbſt gebildet; nach Euklids Meinung: die Verhältniſs $\frac{P}{Q}$ ſey die Verhältniſs von der erſten A zu der dritten C von dreyen ſtetigen proportionellen Gröſsen, von welchen A und B die zwo erſten ſeyn. Wenn wir ſagen, daſs die Verhältniſs von P zu Q von der Verhältniſs A zu B dreyfach ſey; ſo giebt dies, nach unſerer Meinung,

*) καὶ ἀεὶ ἑξῆς ἑνὶ πλεῖον, ἕως ἂν ἡ ἀναλογία ὑπάρχῃ.

nung zu erkennen, daſs dieſe Verhältniſs aus der Vervielfältigung der Verhältniſs $\frac{A}{B}$ zweymal mit ihr ſelbſt, entſtehe, daſs ſie die Verhältniſs: A^3 zu B^3 ſey; nach dem Euklidiſchen Sinne bezeichnet es ſo viel, daſs die Verhältniſs von P zu Q die Verhältniſs der erſten zu der vierten von vier ſtetig proportionellen Gröſſen ſey, von welchen A und B die zwo erſten ſind. So ſehr nun dieſe Ausdrucke dem erſten Anſcheine nach von einander verſchieden ſeyn mögen, ſo laufen ſie doch auf das nehmliche hinaus, wie wir dies in der Anmerkung zu dem 14ten Lehrſatze beweiſen werden.

Euklides hat ſeine Definition gewiſs vor der andern, die natürlicher iſt, und ihm nicht unbekannt war, da ſie gerade aus der 5ten Def. des ſechſten Buches erfolgt, gewählt; weil er die doppelte Verhältniſs zwoer Linien in dem 6ten Buche gebrauchen wollte, indem er wohl einſah, daſs die Multiplication im genauen Sinne nur in Zahlen, und nicht in Linien oder andern Gröſſen geſchehen kann; weswegen er auch bey dem Begriffe von doppelter Verhältniſs von Linien, den Begriff von Multiplication vermeiden wollte.

18.

Man heiſst ſubduple (unterzwofache, unterdoppelte) Verhältniſs, untertriple (unterdreyfache) Verhältniſs, und ſo weiter, eine Verhältniſs, welche die zwote oder die dritte Wurzel und ſo weiter von einer gegebenen Verhältniſs iſt.

Z. B. $\sqrt{\frac{A}{B}}$ oder $\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}$; $\sqrt[3]{\frac{A}{B}}$ oder $\frac{\sqrt[3]{A}}{\sqrt[3]{B}}$ sind unterdoppelte, und unterdreyfache Verhältnisse von $\frac{A}{B}$.

H. a. §. 130. — S: p. 245. d. 6.

Anmerk. Man macht noch weitere Unterscheidungen von Verhältnissen, die man alle bey Clavius über die Erklärungen vom 5ten Buche Euklids sehen kann, wie z. B. von anderthalben Verhältnissen, d. h. den Verhältnissen der Quadrat-Wurzeln von den dritten Mächten oder $\frac{\sqrt[2]{A^3}}{\sqrt[2]{B^3}}$.

*Hypothesen (Postulate *), Annahmen).*

1.

Man nimmt an, daß, wenn drey Grössen gegeben seyn, eine vierte proportionelle zu ihnen gefunden werden könne.

2.

Daß, wenn zwo Grössen gegeben seyn, eine dritte proportionelle gefunden werden könne.

Axio-

*) Im Französischen *demandes*, s. de la Caille p. 2.

Axiome

oder

Grundſätze (allgemeine Sätze.)

1.

Gleiche Gröſſen haben dieſelbe Verhältniß zu einander, eben ſo auch jede von ihnen zu einer dritten Größe.

Wenn A = B, C = D; *ſo iſt*
A : B = C : D;
und
A : E = B : E.

Eucl. 5, 7. — W. a. §. 72. *)

2.

Eine gröſſere Gröſſe hat zu einer andern eine gröſſere Verhältniß, als eine kleinere zu derſelben; doch dieſe dritte hat eine kleinere Verhältniß zu der gröſſern Gröſſe, als zu der kleinern, und eine gröſſere Verhältniß zu der kleinern, als zu der gröſſern; und umgekehrt.

Wenn A > B; *ſo iſt* A : C > B : C;
C : A < C : B;
C : B > C : A.

Eucl. 5, 8. 10.

*) In der ſchon angeführten Ausgabe: Theor. 14. §. 163.

3.

Größen, die zu derselben Grösse eine gleiche Verhältniss haben, sind gleich, und umgekehrt.

Wenn A : B = C : B;
so ist A = C.
Wenn A = C;
so ist A : B = C : B.

Eucl. 5, 9. — W. a. §. 73. *)

4.

Die Gleichvervielfältigte und Gleichsubmultiplicirte (Gleichuntervervielfältigte), oder Gleichvielfache und Gleichtheilige zwoer gleichen Grössen sind gleich: und die — von zwoen ungleichen Grössen sind in derselben Verhältniss als die Grössen selbst.

Wenn A = B; *so ist* m x A = m x B, *und* $\frac{A}{m} = \frac{B}{m}$

Wenn $\frac{A}{B} = 9$ so ist $\frac{mA}{mB} = 9$

Wenn A : B = C : D; *so ist* m A : m B = C : D, *und* m A : m B = m C : m D, *und* m A : m B = n C : n D.

Eucl. 5, 15. und 7, 17. 18. — W. a §. 74. **)

Corol-

*) Oder im grössern Werke: Theor. 19 §. 177. Uebrigens ist dieser Grundsatz schon im erstern enthalten.

**) S. in jenem Werke: Theor. 20. 21. §§. 178. 181.

Corollarium.

Man kann dies auch auf folgende Art ausdrücken: Wenn zwo Größen einander gleich ſind; ſo wird die Gleichheit nicht geſtöhrt, wenn ſie mit derſelben Zahl multiplicirt oder dividirt werden: und eine Groſſe bleibt dieſelbe, wenn ſie mit denſelben Groſſen multiplicirt und dividirt wird.

L. C. §§. 296. 297. — St. p. 222. pr. 10. p. 225. pr. 12.

5.

Wenn zwo Verhältniſſe einer dritten gleich ſind; ſo ſind ſie unter einander gleich.

Eucl. 5. 11. — St. p. 224. pr. 11. — W. §. 70.*)

6.

Wenn zwo Verhältniſſe einander gleich ſind, und eine von ihnen gröſser oder kleiner, als eine dritte iſt; ſo iſt es die zwote auch.

Eucl. 5. 13.

*) Im ang. Werke Theor. 13. §. 167.

Eigenschaften der geometrischen Verhältniss-Gleichheiten.

1ster Lehrsatz.

Wenn vier Grössen A, B, C, D *proportional sind, und man Gleichvielfache* (m) *von der ersten und dritten* (m A, m C) *und andere Gleichvielfache* (n) *von der zwoten und vierten* (n B, n C) *nimmt; so wird das Gleichvielfache von der dritten immer gleich gross, grosser oder kleiner, als das von der vierten seyn, je nachdem das Gleichvielfache der ersten gleich gross, grösser oder kleiner, als das von der zwoten ist, man mag auch eine Vervielfältigung vornehmen, welche man wolle.* *)

Beweis. Nach dem, was angenommen ist, ist

$$A : B = C : D \text{ oder}$$

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$$

Daher (Axioma 4.)

$$\frac{mA}{nB} = \frac{mC}{nD}; \text{ folglich}$$

wenn m A *entweder* $>$, *oder* $=$, $<$ n B; *so ist auch* m C *entweder* $>$, *oder* $=$, *oder* $<$ n D.

W. Z. B. W.

Anmerkung. Man sieht, dass die von Euklid gegebene Erklärung von der Verhältniss-Gleichheit

*) Vergl. Wolfii Theor. 47. §. 219.

heit aus der unſrigen folgt. Siehe unſere 11te Erklärung Anm. 4.

2ter Lehrſatz.

Wenn die Verhältniß von A *zu* B *größer als die von* C *zu* D *iſt; ſo kann man ſolche Gleichvielfache* (m) *von der erſten und dritten Gröſse* (mA, mC) *und ſolche andere Gleichvielfache* (n) *von der zwoten und vierten* (nB, nD) *nehmen, daß, wenn das Gleichvielfache der erſten* (mA) *das der zwoten* (nB) *übertrifft, dennoch das der dritten* (mC) *das der vierten* (nD) *nicht übertreffe, ſondern entweder gleich, oder kleiner ſey.*

Tacquet zum 5*ten Buche Euklid's* Par.. II. Th. I.

Beweis. Es ſey $A:B > C:D$

$$\text{oder } \frac{A}{B} > \frac{C}{D},$$

$$\text{folglich } \frac{mA}{nB} > \frac{mC}{nD}.$$ Nun kann, inſoferne $mA > nB$ iſt $\frac{mA}{nB} > \frac{mC}{nD}$ ſeyn, wenn auch $mC > nD$ iſt, und es findet ſicher Statt, wenn $mC = nD$, oder $mC < nD$ iſt.

3ter Lehrſatz.

Wenn man zwo Verhältniſſe A : B *und* C : D *hat, und die Gleichvielfache* (mA, mC) *von den vorgehenden Gliedern ſind zugleich entweder gleichgroß, oder gröſſer, oder kleiner, als andere Gleichvielfache* (nB,

 nD)

nD) von den nachfolgenden; so sind diese zwo Verhältnisse gleich.

Tacquet 5ten Buchs P. II. Th. 2.

Beweis. Der Lehrsatz ist; Wenn *m*A entweder >, oder =, oder < *n*B, und zugleich *m*C entweder >, oder =, oder < *n*D ist; so ist auch

A : B = C : D;

Denn wenn dies nicht ist; so ist A : B entweder > C : D, oder C : D > A : B. Wenn das erste ist; so wird man (2ter Lehrsatz), wenn *m*A entweder >, oder =, oder < *n*B wäre, in jedem dieser drey Fälle entweder *m*C > *n*D, oder *m*C = *n*D, oder *m*C < *n*D haben konnen, welches der Voraussetzung entgegen läuft. Wenn C : D < A : B; so wird man, wenn *m*C entweder >, oder =, oder < *n*D, in jedem dieser drey Fälle entweder *m*A > *n*B, oder *m*A = *n*B, oder *m*A < *n*B haben können; welches ebenfalls gegen die Voraussetzung ist. Daher giebt es weder A : B > C : D, noch A : B < C : D; folglich ist A : B = C : D.

Corollarium.

*Wenn man Gleichvielfache (m*A, *m*C*) von den vorgehenden Gliedern und Gleichvielfache (n*B, *n*D*) von den nachfolgenden Gliedern von der Beschaffenheit nehmen kann, daß, indessen das Gleichvielfache des ersten vorgehenden grösser, als das seines nachfolgenden ist (daß m*A > *n*B*) das Gleichvielfache des zweyten vorgehenden dennoch nicht grösser, sondern gleich oder kleiner als das seines nachfolgenden sey (daß m*C *nicht*

> *n*D

$> n$D); *ſo wird die Verhältniß des erſten vorgebenden zu ſeinem nachfolgenden gröſſer ſeyn, als die von dem zweyten vorgebenden zu ſeinem nachfolgenden (ſo wird* A : B > C : D *ſeyn*).

Tacquet. 5ten Buches P. II. Th. 3.

Beweis. Wird dies nicht ſeyn; ſo ſey A : B = C : D, und daher (3ter Lehrſ. *)) wenn $mA > nB$; ſo iſt $mC > nD$; welches gegen die Vorausſetzung iſt. Wenn A : B < C : D, oder C : D > A : B; ſo wird $\frac{C}{D} > \frac{A}{B}$, folglich $\frac{mC}{nD} > \frac{mA}{nB}$ und folglich, wenn $mA > nB$; ſo wird auch $mC > nD$ ſeyn; welches gegen die Vorausſetzung iſt; daher findet weder A : B = C : D, noch A : B < C : D Statt. Folglich iſt A : B > C : D.

Anmerk. Man ſieht aus dieſem Lehrſatze und ſeinem Corollario, wie die Gleichheit von Verhältniſſen aus der Lehre der Gleichvielfachen, die Euklid angenommen hat (ſiehe die 4te Anmerkung zu der 11ten Definition), abgeleitet wird, und daſs daher die eine Lehre hierin vollkommen mit der andern übereinkömmt. Es erhellet ferner, daſs es eben daſſelbe iſt, ob die Gröſſen unter einander meſsbar ſeyn, oder ob ſie als unmeſsbar geſetzt werden.

Doch um dies weiter zu beleuchten, werden wir den folgenden Lehrſatz, welcher unmittel-

*) Ich wollte lieber den 1ſten Lehrſatz citiren, von welchem der 3te der umgekehrte iſt.

mittelbar auf die *unmeßbaren* Verhältnisse geht, noch beyfügen.

4ter Lehrsatz.

Wenn man vier Grössen A, B, C, D *setzt auf die Art, daß* A *in Beziehung auf* B *unmessbar, und* C *in Beziehung auf* D *es sey, doch daß* B *und* D *untereinander meßbar seyn, und wenn man dann weiter annimmt, daß* B *in eine Anzahl* m *von Theilen, wovon jeder* b *gleich sey, und* D *in eine solche Anzahl* m *von Theilen, wovon jeder* d *gleich sey, getheilt werden, und wenn endlich* $A > nb$, *jedoch* $< \overline{n+1}.b$, *zugleich* $C > nd$, *jedoch* $< \overline{n+1}.d$ *ist, die Grösse der Zahlen* m *und* n *möge auch seyn, welche sie wolle; so werden die Grössen* A, B, C, D, *proportionell seyn.*

Karsten Geom. §. 182.

Beweis. Angenommen ist $B = mb$; $D = md$; $A > nb$ und zugleich $C > nd$; $A < \overline{n+1}.b$, und zugleich $C < \overline{n+1}.d$.

Man muss beweisen, dass alsdann

$$A : B = C : D.$$

Wenn dies nicht Statt findet; so sey $A : B = E : D$. E wird alsdann grösser oder kleiner, als C seyn müssen.

Aus dem Gesetzten $A : B = E : D$ erhellt, dass

$$\frac{A}{B} = \frac{E}{D}; \text{ folglich } \frac{A}{mb} = \frac{E}{md}$$

Allein

Allein $A > nb$, und $< \overline{n+1} . b$;

folglich $\frac{nb}{mb} < \frac{E}{md}$ und $\frac{\overline{n+1} . b}{mb} > \frac{E}{md}$,

oder

$n < \frac{E}{d}$ und $\overline{n+1} > \frac{E}{d}$, das heiſst:

$nd < E$, und $\overline{n+1} . d > E$.

doch man hat auch

$nd < C$ und $\overline{n+1} . d > C$.

Man kann nun d, E, C als vier Gröſſen d, C, d, E, betrachten, von welchen man Gleichvielfache nimmt, namentlich n, oder $\overline{n+1}$ von der erſten und dritten Gröſſe, und 1. von der zwoten und vierten, und da nun, wenn die von der erſten kleiner oder gröſser iſt, als die von der zwoten ($nd < C$, $\overline{n+1} . d > C$), die von der dritten auch zugleich kleiner oder gröſser iſt, als die von der vierten ($nd < E$, $\overline{n+1} . d > E$); ſo folgt hieraus, daſs man habe

$d : C = d : E$, und folglich (Axiom. 3.) $C = E$. Es iſt daher weder gröſser noch kleiner, als C, ſondern C gleich, und folglich, da

$A : B = E : D$; ſo iſt auch

$A : B = C : D$; welches zu beweiſen war.

1ſte Anmerkung. Wir haben bereits in der 4ten Anmerkung zur 7ten Erklärung gezeigt, daſs, wenn zwo Gröſſen C und D unter einander unmeſsbar ſeyen, die Vorausſetzung $nd < C$ und $\overline{n+1} > C$ Statt habe.

2te Anmerkung. Wir haben zwar in unserem Beweise vom dritten Falle, der bey den Vielfachen Statt haben muss, um die Verhältniss-Gleichheit daraus folgern zu können, keine Meldung gethan, nemlich, dass wenn n d = C, auch n d = E seyn müsse; doch hier ist wegen der Unmessbarkeit zwischen C und D, dieser Fall unmöglich; denn hätte dieser Fall Statt; so würden C und D untereinander messbar seyn, und die Gleichheit der beyden Verhältnisse A : B und C : D folgte von selbst.

3te Anmerk. Wir werden uns dann nun in der Folge nicht mehr mit der Messbarkeit oder Unmessbarkeit in den Lehrsätzen aufhalten, und der Anleitung unserer 11ten Erklärung folgen. Nur werden wir in den Anmerkungen hier und da ein Wort zur näheren Beleuchtung beyfügen.

5ter Lehrsatz.

Wenn vier Grössen in einer Geometrischen Verhältniss-Gleichheit stehen, so ist das Product der beiden äussersten dem der beyden mittlern gleich: und umgekehrt: wenn zwey Producte, wovon jedes aus zwo Grössen besteht, gleich sind; so sind diese Grössen in einer Geometrischen Verhältniss-Gleichheit: die erste nemlich vom ersten Producte zu der ersten vom zweyten Producte, wie die zwote des zweyten Productes zu der zwoten des ersten Productes.

Euclid 7. 19. — W. a. §. 109. *) — St. p. 215. pr. 6.

Be-

*) Thh. 58. 60. §§. 297. 299. im grössern Werke.

Beweis. Mit der 10ten und 11ten Definition und dem Corollarium des 4ten Grundſatzes.

1ſte Anmerkung. Wir verſtehen hierunter ſo wohl die *Produkte*, welche in der That durch Zahlen ausgedrückt werden können, als diejenigen, welche man nur anzeigen kann, und folglich iſt dieſer Lehrſatz ſo wohl auf die *unmeſsbaren*, als *meſsbaren* Gröſſen anwendbar.

2te Anmerkung. Man findet dieſen Lehrſatz nicht im Allgemeinen bey Euclid, ſondern nur für die Zahlen in ſeinem 7ten Buche. Allein wir werden in No. 2. des 8ten Corollariums vom 7ten Lehrſatze im 4ten Buche anzeigen, daſs der 16te Lehrſatz im 6ten Buche *Euklid's* mit dieſem Lehrſatze übereinkomme.

1ſtes Corollarium.

Wenn drey Gröſſen ſtetig proportionell ſind; ſo iſt das Produkt der äuſſerſten der zwoten Macht der mittleren gleich.

Euclid 7, 20. S. p. 216. 1ſtes Corollatium von dem 6ten Satze *)

2te Anmerkung. Wir werden in No. 3. des 8ten Corollariums vom 7ten Lehrſatze im 4ten Buche anzeigen, daſs der 17te Lehrſatz im 6ten Buche *Euklids* mit dieſem Lehrſatze übereinſtimme.

2tes

*) Ebendaſelbſt Th. 69. §. 298.

2tes *Corollarium.*

Die Zahlen, woraus zwey gleiche Produkte entstanden sind, können immer so gesetzt werden, dass eine geometrische Verhältniss-Gleichheit daraus entstehe.

L. C. §. 302.

3tes *Corollarium.*

Hieraus ergeben sich von selbsten die Regeln, eine vierte, eine dritte, oder eine mittlere Proportional-Zahl zu finden.

W. a. §§. 112. 113. *)

3te *Anmerk.* Auf dieses Corollarium gründet sich *die Regel Detri* (*die Regel von Dreyen*), und eben darauf, verbunden mit dem 4ten Axiome, *die Regel von Dreyen in Brüchen*, wie wir dieses mit Beyspielen beleuchten werden. **)

L. C. §§. 320 – 323. — W. a. §§. 114 – 119. ***) S. p. 218. 3tes Corollarium; pp. 223. 224. pr. X. Corollarium.

6ter

*) Ebenfalls daselbst Probl. 32. 33. §. 301. 302.

**) Vergl. auch Hr. Abr. Gotth. Kästners Anfangsgründe der Arithmetik etc. 3te verb. Aufl. Gött. 1774. p. 132. et seqq.

***) In Wolfs grösserem Werke, Probl. 33. Schol. 2 et seqq. §. 307 et seqq.

6ter Lehrſatz.

Wenn die Produkte von vier Gröſſen in der Ordnung, in welcher ſie angeführt werden, namentlich von der erſten und zwoten, und von der dritten und vierten, einander gleich ſind; ſo ſtehen dieſe Gröſſen in umgekehrten Verhältniſſen zu einander: die erſte zu der dritten, wie die vierte zu der zwoten: oder die erſte zu der vierten, wie die dritte zu der zwoten.

S. p. 219. pr. 8. p. 234. pr. 21.

Beweis. Mit dem 2ten Corollarium von dem 5ten Lehrſatze.

Corollarium.

Hierauf gründet ſich die Art, eine vierte umgekehrte Proportionalgröſſe zu finden, das heiſst, eine Gröſſe zu finden, die ſo beſchaffen ſey, daſs die erſte und zwote in umgekehrter Verhältniſs von der dritten und vierten ſtehen.

Anmerk. Hierauf gründet ſich die *umgekehrte Regel von Dreyen*, welche wir mit vielen Beyſpielen beleuchten werden.

W. a. §. 119. *)

Die umgekehrte Regel *von Dreyen* iſt der Art nach von der gewohnlichen Regel *von Dreyen* nicht nur allein darin verſchieden, daſs die Frage bey der letzt-

*) S. daſelbſt Probl. 33. Scholion 6. §. 311.

letztgedachten nicht gerade zu angegeben wird. Man kann immer erkennen, ob man die gerade oder die umgekehrte Regel von dreyen gebrauchen müsse. Wenn in dem, was gefragt wird, das vierte Glied, welches man sucht, in derselben Verhältniss grösser oder kleiner, als das dritte von den gegebenen Gliedern seyn muss, als das zweyte grösser oder kleiner ist als das erste; so hat man die gerade Regel von dreyen. Allein wenn das vierte Glied in derselben Verhältniss *grösser* oder *kleiner* als das dritte seyn muss, als das zweyte (nicht grösser oder kleiner, sondern) *kleiner* oder *grösser* als das erste ist; so hat man den Fall von der umgekehrten Regel von dreyen. Zum Beispiele: 40 Menschen machen in einem Tage eine Mauer von 45 Ruthen. Wie viel Menschen wird man haben müssen, um in der nämlichen Zeit eine Mauer von 81 Ruthen zu machen? Setzt man x für das Gefragte; so hat man nicht: $40:45=81:x$; sondern: $40:45=x:81$.

7ter Lehrsatz.

Wenn vier Grössen (A, B, C, D) *proportionell sind; so werden sie es ebenfalls verwechselt seyn, das heißt, wenn man die vorgehende der zwoten Verhältniß anstatt der nachfolgenden bey der ersten, und diese nachfolgende anstatt der gemeldten vorgehenden setzt* (A : C = B : D): *und auch umgekehrt, wenn man die nachfolgenden an die Stelle der vorgehenden setzt.*

Eucl. 5, 16. und 5, 4. Coroll. und 7, 13. — W. a. §. 111. *) — St. p. 220. Cor, 1. van de VIII Pr. — L. C. p. 304.

Be-

*) oder W. Th. 18. §. 173. und Th. 15. §. 169.

Beweis. Aus dem zweyten Corollarium des 5ten Lehrſatzes. *)

Anmerk. Die Verwechslung (alterna ratio, die auch von andern permutatio genannt wird) wird von *Euclid* (5tes Buch 13te Def.) auf folgende Art erklärt: „es iſt zu ſetzen die *vorgehende* zu der *vorgehenden*, wie die *nachfolgende* zu der *nachfolgenden*.“ **)

2te Anmerk. So lange man die Gröſſen in abſtracto betrachtet, findet die Verwechslung immer Statt. Allein wenn man beſtimmte Vorſtellungen von dieſer und jener Gröſſe insbeſondere damit verbindet, findet ſie nicht Statt, die vier Gröſſen müſsten denn gleichartig ſeyn. Ein flämiſches Pfund verhält ſich, zum Beyſpiel, zu einem Gulden, wie ein Oxhoofd zu einem Anker ***) die vorgehenden ſind beyder-

*) Dieſes Corollarium geht zwar nur auf die Zahlen. Es erhellet aber aus dem Lehrſatze ſelbſt, daſs es auch auf alle Gröſſen ausgedehnt werden kann.

**) Ἐναλλὰξ λόγος ἐστὶ λῆψις τοῦ ἡγουμένου πρὸς τὸ ἡγούμενον καὶ τοῦ ἑπομένου πρὸς τὸ ἑπόμενον.

***) Ein pond vlaams macht 6 holländiſche Gulden, die den Deutſchen gegenwärtig ganz gleich kommen. In der Murbeeckiſchen Auflage des neuen Deutſch-Holländiſchen Wörterbuchs von Matthias Kramern Leipzig 1787. werden auf ein Oxhoofd 180 Nöſel gerechnet. Allein ich habe Grund, zu vermuthen, daſs ein Oxhoofd 192. Nöſel

derseitig das Sechsfache der nachfolgenden. Allein wenn man *mit Verwechselung* sagt: ein Flämisches Pfund verhalte sich zu einem Oxhoofd, wie ein Gulden zu einem Anker; so hat dies keinen Sinn, weil im geringsten keine Verhältniss zwischen einem Flämischen Pfunde und einem Oxhoofde Statt haben kann. Deswegen fügen Einige zu diesem Lehrsatze die Bedingung hinzu, dass alle Glieder der Proportionalität gleichartig seyn müssen; und dies gielt auch für den folgenden Lehrsatz. Allein wir betrachten hier die Grössen im Abstrakten. Wenn *Euclid* in dem 13ten Lehrsatze des 7ten Buches von Zahlen redet; so spricht er, und zwar mit Grunde, von der Verwechslung im Allgemeinen, welche immer Statt habe.

3*te* *Anmerkung.* Die Definition *der Umkehrung*, welche Euklid gegeben hat, ist folgende: die Umkehrung der Verhältnisse besteht darin, dass man die *nachfolgende Größe* zu der *vorgehenden*, wie die *nachfolgende* zu der *vorgehenden* setze." *) Vergleicht man diese mit unserer 15ten Def. so erhellet, dass es damit auf dasselbe hinausläuft; denn wenn ich setze: $A : B = C : D$, oder $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ und daraus schliesse,

sel enthalte. Ich bedaure, dass ich Herrn Arnee's Arithmetik, die auch die Holländische Maasse sehr pünktlich angiebt, nicht bey der Hand habe.

*) Ἀνάπαλιν λόγος, ἐςὶ λῆψις τȣ ἑπομένȣ ὡς ἡγȣμένȣ, πρὸς τὸ ἡγȣμενον ὡς ἑπόμενον.

fchliefse, $B:A=D:C$; oder $\frac{B}{A}=\frac{D}{C}$; fo erhellet, dafs ich den Umgekehrten Fall nehme. Siehe das Corollarium von diefer 15ten Definition.

4te Anmerkung. Die vier Glieder einer Verhältnifs-Gleichheit können auf verfchiedene Art verändert werden, wenn man *Verwechslung* und *Umkehrung* dabey zu Hülfe nimmt: *) Auf folgende Art:

$A:B=C:D$	,, $A:C=B:D$
,, $B:A=D:C$	,, $C:A=D:B$
,, $B:D=A:C$	,, $C:D=A:B$
,, $D:B=C:A$	,, $D:C=B:A$.

Und man könnte ebenfalls aus denfelben vieren Proportional-Gröffen $A:B=C:D$, und folglich aus $A\times D=B\times C$ acht umgekehrte Verhältniffe machen, wie zu erfehen ift:

$A:B=\frac{1}{D}:\frac{1}{C}$	$B:A=\frac{1}{C}:\frac{1}{D}$
$A:\frac{1}{D}=B:\frac{1}{C}$	$B:\frac{1}{C}=A:\frac{1}{D}$
$C:D=\frac{1}{B}:\frac{1}{A}$	$C:\frac{1}{B}=D:\frac{1}{A}$
$D:C=\frac{1}{A}:\frac{1}{B}$	$D:\frac{1}{A}=C:\frac{1}{B}$;

 wel-

*) Das einemal die Verwechfelung, das andere mal die Umkehrung. Auch hat man nur beym Zählen der 8 Veränderungen auf die zwey vorderen Glieder zu fehen. Bey der neunten Veränderung käme man wieder auf $A:B=C:D$.

welches man immer nach Wohlgefallen thun kann. Die Verhältniſs-Gleichheit wird zwiſchen dieſen Gröſſen, wie man ſie auch ordnen möge, immer ſtatt haben: wenn die Produkte den äuſſern, und mittlern AD = BC geben, oder auf dieſe Gleichheit gebracht werden können.

8ter Lehrſatz.

Wenn vier Gröſſen proportional ſind; ſo hat man vermöge der Zuſammenfügung die Summe der erſten und zwoten (A + B) zu der erſten (A) oder zu der zwoten (B), wie die Summe von der dritten und vierten (C + D) zu der dritten (C), oder zu der vierten (D): und vermöge der Abziehung: den Unterſchied der zwo erſten zu der erſten (A) oder zwoten (B), wie den Unterſchied der zwo letzten (C — D) zu der dritten (C), oder vierten (D): und vermiſcht, die Summe der zwo erſten zu ihrem Unterſchiede, wie die Summe der zwo letzten zu ihrem Unterſchiede, und umgekehrt für alle dieſe Fälle.

Eucl. 5, 17. 18. und 7, 11. — L. C. §. 304. — S. p. 227 — 229.

Beweis. Mit dem 5ten Lehrſatze, 2ten Corollarium, und 5ten Grundſatze.

1ſte Anmerkung. *Euclid* giebt folgende Erklärung von der Zuſammenfügung (*Compoſitio*): „die Zuſammenfügung einer Verhältniſs, iſt „das Nehmen der Verhältniſs der vorgehenden „und

„und nachfolgenden, als *einer* Gröſſe zu der nachfolgenden." 5. B. 15te Def. *) — Die Erklärung von der Abziehung (*Trennung*) iſt bey ihm dieſe: „die Abziehung einer Verhältniſs, iſt das Nehmen der Verhältniſs des „Uebermaaſses der vorgehenden über die nachfolgende, zu der nachfolgenden." 5ten Buches 16te Def. **) Was man in dieſem Falle *diviſio* oder *dividendo* nennt, nenne ich hier *Abziehung*, oder wenn man will *Trennung* (dies iſt auch in dieſem Falle die wahre Bedeutung des griechiſchen Worts Διαίρεσις, deſſen ſich Euclid bediente), und nicht *Theilung* oder *Diviſion*, welche nun ganz andere Begriffe als die von einer *Trennung* oder *Abziehung*, oder *Subtraktion* in uns erweckt.

Corollarium.

Aus dieſem Lehrſatze kann man nach der Verwechslung und Umkehrung viele andere Verhältniſs-Gleichheiten ableiten, von denen es unnöthig wäre, ſie alle in Worten auszudrücken. Siehe hier die vornehmſten:

*) Σύνθεσις λόγου, ἐστὶ λῆψις τοῦ ἡγουμένου μετὰ τοῦ ἑπομένου ὡς ἑνὸς πρὸς αὐτὸ τὸ ἑπόμενον.

**) Διαίρεσις δὲ λόγου ἐστὶ λῆψις τῆς ὑπεροχῆς, ἣ ὑπερέχει τὸ ἡγούμενον τοῦ ἑπομένου πρὸς αὐτὸ τὸ ἑπόμενον.

Die gegebene sind:

1. $A+B:A=C+D:C$;
2. $A+B:B=C+D:D$:
3. $A-B:A=C-D:C$;
4. $A-B:B=C-D:D$:
5. $A+B:A-B=C+D:C-D$.

Hieraus folgen:

6. $B:A+B=D:C+D$:
7. $A:A+B=C:C+D$:
8. $A+B:C+D=A:C$
9. $B:D=A+B:C+D$;
10. $A+B:C+D=A-B:C-D$;

und so weiter.

3te Anmerk. Die 1ste Verhältniss-Gleichheit *verwechselt*, nemlich $A+B:C+D=A:C$, verglichen als Voraussetzung mit der 9ten, nehmlich $B:D=A+B:C+D$ als Folgerung, giebt die Materie des 19ten Satzes von Euclid, und die 1ste als Voraussetzung, mit der zwoten als Folgerung verglichen, giebt das Corollarium dieses Satzes, namentlich: wenn zusammengefügte Grössen proportional sind; so sind sie es auch nach ihrer *Zurückkehrung* (omwending, *Umdrehung*, conversio.) Er nennt nemlich *Zurückkehrung* in der 17ten Definition: „das Nehmen der Verhältniss von der vorgehenden, zu dem Ueberschusse der vorgehenden über die nachfolgende.“ *)

9ter

*) Ἀναστροφὴ λόγου, ἐστὶ λῆψις τοῦ ἡγουμένου πρὸς τὴν ὑπεροχὴν, ᾗ ὑπερέχει τὸ ἡγούμενον τοῦ ἑπομένου.

9ter Lehrſatz.

In allen Verhältniſs-Gleichheiten iſt, wenn die vorgehende der erſten Verhältniſs gröſser, gleich groſs, oder kleiner, als ihre nachfolgende iſt, die vorgehende der zwoten Verhältniſs auch gröſser, gleich groſs oder kleiner, als ihre nachfolgende: oder wenn die vorgehende der erſten Verhältniſs gröſser, gleich groſs, oder kleiner, als die der zwoten iſt; ſo wird die nachfolgende der erſten auch gröſser, gleich groſs, oder kleiner, als die nachfolgende der zwoten ſey: oder wenn die nachfolgende der einen gröſser, gleich groſs, oder kleiner, als die der andern iſt; ſo iſt ihre vorgehende auch gröſser, gleich groſs oder kleiner, als die vorgehende dieſer andern.

Eucl. 5, 14. — L. C. §. 306.

Beweis. Aus dem 5ten Lehrſatze.

1ſtes Corollarium.

Wenn die erſte Gröſse einer Verhältniſs-Gleichheit die gröſte unter allen iſt; ſo iſt die letzte die kleinſte von allen.

2tes Corollarium.

Die Summe der gröſten und kleinſten iſt gröſser, als die Summe der beyden übrigen.

Beweis. Mit dem 1ſten Corollarium, dem 8ten Lehrſatze No. 2, und dem 7ten. *)

Anmerk. Dies iſt der 25ſte Satz des 5ten Buchs von Euklid, worin dieſer Schriftſteller ſtillſchweigend vorausſetzt, daſs, wenn die erſte Gröſse die gröſte iſt, die vierte die kleinſte ſey.

10ter Lehrſatz.

Wenn man zwo Verhältniß-Gleichheiten hat (A : B = C : D *und* E : F = G : H), *wovon jede aus vier Gliedern beſteht; ſo werden die Glieder der einen, jedes in ſeinem Range, mit den Gliedern der andern vervielfältiget oder getheilet, noch Verhältniſs-gleich ſeyn, d. h.*

Wenn A : B = C : D
und E : F = G : H;

ſo wird AE : BF = CG : DH, *und* $\frac{A}{E} : \frac{B}{F} = \frac{C}{G} : \frac{D}{H}$ *ſeyn.*

L. C. §. 307. — St. p. 230. pr. 17.

Beweis. Mit dem 5ten Lehrſatze und ſeinem 2ten Corollarium.

1ſtes

*) Man ſetze bey der letztern Proportion, die man erhält, die zween andern möglichen Fälle, ſo wird man leicht auf das Ungereimte derſelben kommen.

1ſtes Corollarium.

Wenn vier Zahlen Verhältniſs-gleich ſind; ſo werden auch ihre Machten und ihre Wurzeln, von der nemlichen Ordnung, Verhältniſs-gleich ſeyn.

L. C. §. 308. — S. p. 231. pr. 18.

2tes Corollarium.

Wenn vier Gröſſen proportionell ſind; ſo verhält ſich die Hälfte der erſten zu der zwoten, wie die dritte, zu der doppelten von der vierten: oder allgemeiner: die Verhältniſs-Gleichheit bleibt ungeſtört, es mag eine der zwo äuſſerſten Gröſſen mit irgend einer Zahl dividirt, und die andere zugleich mit derſelben multiplicirt werden. Das Nehmliche hat in Rückſicht der beyden mittlern Statt.

Tacquet *Lemma* ad pr. 11. ex *Archimede.* — S. p. 233. pr. 20.

11ter Lehrſatz.

Wenn man zwo, oder mehrere Verhältniſs-Gleichheiten hat (A : B = D : E *und* B : C = E : F), *worin die vorgehenden oder nachfolgenden der erſten, auch entweder vorgehende oder nachfolgende der letzten ſind; ſo werden auch die übrigen Glieder der erſten, jedes in ſeinem Range mit den übrigen Gliedern der letzten proportionell ſeyn* (A : C = D : F).

S. p. 232. pr. 19. *)

Beweis.

*) Der Satz, wie ihn Herr van Swinden ſetzt, iſt ganz richtig gegeben. Nur kömmt es mir vor, er könnte dem Anfänger

Beweis. Nach dem 10ten Lehrſatze.

1ſte Anmerk. Dieſer Lehrſatz enthält den 22ſten und 23ſten Lehrſatz Euklids. In beyden ſchlieſst man (*ex aequo*) *nach Gleichheit.* Allein der Schluſs: wenn A:B = D:E, und B:C = E:F; ſo iſt A:C = D:F, wird ein Schluſs *nach Gleichheit mit Ordnung*, und der Schluſs: wenn A:B = E:F, und B:C = D:E; ſo iſt A:C = D:F; ein Schluſs *nach Gleichheit ohne Ordnung* genannt. Beyde Schlüſſe nennt man deswegen *nach Gleichheit*, weil dieſe Schlüſſe in einer Gleichheit von Verhältniſſen beſtehen. Die gegebenen gleichen Verhältniſſe ſind im erſten Falle $\frac{A}{B}$, $\frac{B}{C}$ und $\frac{D}{E}$, $\frac{E}{F}$, und im zweyten $\frac{A}{B}$, $\frac{B}{C}$ und $\frac{E}{F}$, $\frac{D}{E}$ und in beiden ſchlieſst man die Gleichheit zwiſchen $\frac{A}{C}$ und $\frac{D}{F}$. Allein im erſtern Falle geht die Gleichheit der Ver-

fänger mit mehr Erleichterung gegeben worden ſeyn. Zur Probe des Vortrags von Hr. *Steenſtra* ſchreibe ich diesmahl dieſen Satz aus ſeinem Lehrbuche ab, wie dieſer ihn ausgedrückt hat. Er ſagt: „*Wenn eine oder beyde der vorgehenden Gröſſen einer Proportion einer oder beyden der nachfolgenden einer andern Proportion gleich ſind, und dieſe beyden Proportionen mit einander multiplicirt werden: ſo werden die gleichen Glieder aus den entſtehenden Produkten weggelaſſen werden können, während die übrigen Glieder proportionell bleiben.*"

Verhältniſſe in der nemlichen Ordnnng wechſelsweiſe fort. Auf der einen Seite ſind nemlich A, B, C, auf der andern D, E, F gegeben. Die gleichen Verhältniſſe ſind wechſelsweiſe in derſelben Ordnung von der erſten und zwoten Gröſse $\frac{A}{B}$ und $\frac{D}{E}$), von der zwoten und dritten ($\frac{B}{C}$ und $\frac{E}{F}$). Daher geſchieht der Schluſs mit *Ordnung*. In dem zweyten Falle ſind die gleichen Verhältniſſe nicht wechſelsweiſe in derſelben Ordnung. Sie ſind von der erſten und zwoten Gröſse ($\frac{A}{B}$) auf der einen Seite, allein von der zwoten und dritten ($\frac{E}{F}$) auf der andern, und von der zwoten und dritten ($\frac{B}{C}$) auf der einen, allein von der erſten und zwoten ($\frac{D}{E}$) auf der andern Seite. Daher ſchlieſst man zwar nach Gleichheit, allein ohne Ordnung. Und hiemit werden die drey folgende Definitionen *Euklids* hinlänglich ſich aufklären.

Die 18te Definition: „Man ſchlieſst nach „Gleichheit, wenn verſchiedene Gröſſen, auf beyden Seiten in gleicher Anzahl gegeben ſind, und „die erſte auf der einen Seite ſich zu der letzten auf „ihrer Seite, wie die erſte auf der andern Seite ſich „zu der letzten auf ihrer Seite verhält: oder mit an-

„dern

„dern Worten: das Nehmen der äussern mit Unter„lassung der mittlern.“ Und in der That wird in dem Schlusse der mittlern nicht gedacht.

Die 19te. „Die Verhältniss-Gleichheit ist „*nach Ordnung*, wenn die vorgehende zur nachfol„genden, wie die vorgehende zur nachfolgenden „sich verhält; oder wenn die nachfolgende zu einer „andern, wie die nachfolgende zu einer andern sich „verhält.“

Die 20ste. „Die Verhältniss-Gleichheit ist „*ohne Ordnung*, wenn auf zwoen Seiten eine Classe „von dreyen Grössen gegeben ist, die vorgehende „zu der nachfolgenden von der zwoten Classe sich, „wie die vorgehende zu der nachfolgenden von der „erstern Classe, und so wie in dieser erstern die „nachfolgende zu einer andern eben so in der zwo„ten Classe eine andere zu der vorgehenden verhält.“ Wenn z. B. auf der einen Seite A, B, C und auf der andern D, E, F gegeben sind, und die vorgehende A sich zu der nachfolgenden B, wie die vorgehende E zu der nachfolgenden F, und die nachfolgende B zu einer andern C, wie eine andere D zu der vorgehenden E verhält. *)

2te

*) Τεταραγμένη δὲ ἀναλογία ἐςὶν, ὅταν τριῶν ὄντων μεγεθῶν, καὶ ἄλλων ἴσων αὐτοῖς τὸ πλῆθος γίνεται ὡς μὲν ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσιν ἡγȣμενον πρὸς ἑπόμενον ἕτως ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσιν, ἡγȣμενον πρὸς ἑπόμενον. ὡς δὲ ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσιν ἑπόμενον πρὸς ἄλλο τὶ, ἕτως ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσιν ἄλλο τὶ πρὸς ἡγȣμενον.

2te Anmerkung. Unſer Satz iſt allgemeiner; enthält alle mögliche Fälle, und man hat gar nicht nöthig, auf den Unterſchied *nach Ordnung*, oder *ohne Ordnung*, Acht zu geben.

3te Anmerkung. Auf dieſen Lehrſatz gründen ſich alle Operationen, die man mit *der Regel* von *Fünfen*, der *Ketten-Regel*, der *Geſellſchafts-Regel*, und ſo weiter, verrichtet. Man findet nach denſelben das Verlangte vermittelſt einer Verbindung einzelner Verhältniſs-Gleichheiten, worinnen immer einige Glieder die nemlichen ſind, und daher vermöge des *Schluſſes nach Gleichheit* verſchwinden; wie wir dieſes mit einer Anzahl Beyſpiele beleuchten werden.

Siehe L. C. §. 324. — W. a. §. 120. uud folgg. *)

1ſtes Corollarium.

Wenn A : B = D : E;
und B : C = E : F;
oder wenn A : B = E : F
und B : C = D : E;

ſo iſt in beeden Fällen
D >, *oder* =, *oder* < F, *je nachdem*
A >, *oder* =, *oder* < C *iſt*.

Dies erhellet aus dieſem und dem 9ten Lehrſatze, und iſt der 20ſte und 21ſte Euklids, worinnen Er auch dieſe Folgerungen Schlüſſe *nach Ungleichheit*, **) *mit* oder *ohne Ordnung* nennt.

2tes

*) Im lat. Werke: Schol. 7. §. 312. et ſeqq.

**) δι᾽ ἴσου, aus Gleichheit.

2tes Corollarium.

Man kann in eine Verhältniſs-Gleichheit immer anſtatt zweyer Glieder andere ſetzen welche mit denſelben Verhältniſs-gleich ſind. Z. B.

Wenn A : B = CD : EF *und*
C : E = I : K;

ſo iſt A : B = ID : KF.

4te *Anmerkung.* Hierauf gründet ſich die Regel *von falſcher Setzung*; *) welches wir in Beyſpielen erklären werden.

L. C. §. 325.

12ter Lehrſatz.

Wenn man zwo Verhältniß-Gleichheiten hat (A : B = C : D; E : F = G : H), *und die Verhältniſſe, woraus ſie beſtehen, gleich ſind* ($\frac{A}{B} = \frac{C}{D} = \frac{E}{F} = \frac{G}{H}$; *ſo werden die Summen oder Differenzen der Gröſſen in dieſen beyden Verhältniß-Gleichheiten, jede in ihrem Range genommen, auch proportional ſeyn.*

Beweis. Mit dem 5ten Lehrſatze, und deſſen 2ten Corollarium.

L. C. §. 309.

An-

*) *de regel van valſche poſitie; im franz. la Règle de fauſſe poſition.* Das Beyſpiel des Herrn de la Caille verdient nachgeſchlagen zu werden.

Anmerk. Von dieſem Lehrſatze iſt der 24ſte Satz im 5ten Buche *Euklids* ein beſonderer Fall: namentlich, wenn A:B = C:D, und E:B = F:D; ſo iſt A + E:B = C + F:D, in Worten alſo: „Wenn vier Gröſſen (A, B, C, D) pro„portional ſind, und eine fünfte zu der zwoten, „wie eine ſechſte zu der vierten ſich verhält; „ſo iſt die Zuſammenfügung der erſten und der „fünften zu der zwoten, wie die Zuſammenfü„gung der dritten und der ſechſten zu der vier„ten."

Corollarium.

Wenn man zu den nachfolgenden von vier proportionellen Gröſſen andere Gröſſen fügt, oder dieſe von jenen abzieht, wenn ſie nemlich in dem nemlichen Verhältniſſe als die vorgehenden ſtehen; ſo werden dieſe Summen oder Unterſchiede in gleichen Verhältniſſen zu den vorgehenden ſeyn.

13*ter Lehrſatz.*

Wenn man zwo Verhältniſs Gleichheiten hat (A:B = C:D) *und* E:F = G:H) *und die vorgehenden in beyden auch Verhältniſs-gleich ſind* (A:C = E:G); *ſo werden die Summen oder die Unterſchiede der Gröſſen in den beyden Verhältniß-Gleichheiten, jede in ihrem Range genommen, auch Verhältniß-gleich ſeyn.*

L. C. §. 309.

Be-

Beweis. Aus dem 8*ten* Lehrsatze, *) und dessen zweyten Corollarium.

Anmerkung. Dieser und der vorhergehende Lehrsatz geben die zween einzigen Fälle an, worinnen man auf die Verhältniss-Gleichheit der Summen und Unterschiede der Glieder zwoer Verhältniss-Gleichheiten schliessen kann.

Eigenschaften

der

Geometrischen Reihen, oder Progressionen.

14*ter Lehrsatz.*

Wenn verschiedne Grössen (A, B, C, D, E, u. s. w.) *stetig verhältniss gleich sind, oder eine Geometrische Reihe bilden; so steht die erste zu der dritten in der doppelten Verhältniss von der ersten zu der zwoten; zu der vierten in der dreyfachen Verhältniss, und so weiter: mit einem Worte, die erste verhält sich zu der Grösse, die n in ihrem Range ist, wie die Macht n — 1 von der ersten zu der Macht n — 1 von der zwoten.*

L. C. §. 298. 318. S. p. 242. pr. 28.

Beweis.

*) Unter den Druckfehlern und Verbesserungen des v. Swindischen Werkes heisst es: „Statt des 8ten Lehrs. lese den 5ten Lehrsatz" Ich gestehe aber, dass ich den 8ten Lehrsatz hier ganz brauchbar finde.

Beweis. Aus der 12ten und 17ten Definition, und dem 10ten Lehrſatze.

1ſtes Corollarium.

Daher iſt die Verhältniß des erſten Gliedes zu irgend einem andern Gliede aus den Verhältniſſen aller dazwiſchen geſetzten Glieder zu einander, zuſammengeſetzt, das heißt, da alle dieſe Verhältniſſe gleich ſind; ſo iſt ſie aus der Verhältniß des erſten Gliedes zu dem zweyten zuſammengeſetzt, wenn man ſie ſo oft mit ſich ſelbſt multiplicirt, als es Glieder bis zum gegebenen Gliede hingiebt.

Anmerk. Die Definition, welche Euklid von doppelter oder dreyfacher Verhältniſs von zwoen Gröſſen (A : B) giebt, daſs ſie nemlich die Verhältniſs des erſten Gliedes einer ſtetigen Verhältniſs-Gleichheit, von welcher die gegebenen Gröſſen die zwey erſten Glieder ſeyen, zu dem dritten oder vierten iſt, ſtimmt alſo mit unſerer Definition ſehr wohl überein. Siehe oben die 17te Definition und die Anmerkung zu derſelben.

2tes Corollarium.

Die mittlere proportionelle Gröſſe zwiſchen zwoen Gröſſen iſt jedesmal kleiner als die gröſte, jedoch gröſſer als die kleinſte;

denn es ſey $A : B = B : C$:

Alſo $A^2 : B^2 = B^2 : C^2$ (10ter Lehrſatz, 1ſtes Cor. und dieſer Lehrſatz.)

Allein $A > C$: *daher* $A > B$, *und* $B > C$. (9ter Lehrſatz.)

3tes Corollarium.

Jedes Glied einer geometrischen Reihe ist dem vorgehenden, welches mit der Verhältniss des zweyten zum ersten, das heißt (10te Def. 2te Anm.) *mit dem Anzeiger vervielfältiget wird, gleich.*

4tes Corollarium.

Alle geometrische Reihen können folglich, wenn A *das erste,* B *das zweyte Glied, und* q *der Anzeiger oder* $q = \frac{B}{A}$ *ist, auf folgende Art ausgedrückt werden;* A, Aq, Aq^2, Aq^3, Aq^4, Aq^5, — — — — Aq^{n-1}.

L. C. §. 311. — S. p. 237. 25ste Definition.

5tes Corollarium.

Irgend ein Glied (*das* n) *einer geometrischen Reihe, ist dem ersten das, mit der Macht* $(n-1)$ *des Anzeigers vervielfältiget wird, gleich.*

6tes Corollarium.

Wenn das erste Glied grösser, als das zweyte, und der Anzeiger also ein Bruch ist; so ist jedes Glied kleiner als das vorgehende, und die Reihe ist eine abnehmende Reihe, wovon alle Glieder nach einer beständigen Verhältniß je länger, desto kleiner werden, ohne dennoch jemals Null seyn zu können: und wenn das zweyte Glied grösser, als das erste ist; so ist die Reihe eine wachsende Reihe: alle Glieder werden nach einer beständigen Verhältniß je länger, desto

ſto gröſſer: das erſte Glied iſt das kleinſte von allen, jedoch kann es niemals Null ſeyn.

7tes Corollarium.

Nichts hindert, daß man dieſe Reihe, von welcher man angenommen hat, daß ſie in A *beginne, als ſolche betrachten, die vor* A *ihren Anfang nehme, nemlich:* $\frac{A}{q^{(n-1)}}$, — — — — — $\frac{A}{q^4}$, $\frac{A}{q^3}$, $\frac{A}{q^2}$, $\frac{A}{q^1}$, $\frac{A}{q^0}$, Aq, Aq^2, Aq^3, Aq^4 — — Aq^{n-1}

oder (3te Anmerk. zu der 4ten Definition)

$Aq^{-(n-1)}$ — — — — Aq^{-4}, Aq^{-3}, Aq^{-2}, Aq^{-1}, Aq^0, Aq^1, Aq^2, Aq^3, Aq^4 — — — — — Aq^{n-1}.

8tes Corollarium.

Man kann auch die Zahl der Glieder einer gegebenen Reihe vermehren, indem man zwiſchen zweyen nachfolgenden Gliedern eine Anzahl mittlerer proportionaler Glieder nimmt, wodurch die Reihe immer geometriſch bleibt, z. B. in der vorhergehenden Reihe:

A, $Aq^{\frac{1}{4}}$, $Aq^{\frac{1}{2}}$, $Aq^{\frac{3}{4}}$, Aq, $Aq^{1\frac{1}{4}}$, $Aq^{1\frac{1}{2}}$, $Aq^{1\frac{3}{4}}$, Aq^2 *u. ſ. w.*

oder

A, $Aq^{0,25}$, $Aq^{0,5}$, $Aq^{0,75}$, Aq^1, $Aq^{1,25}$, $Aq^{1,5}$, $Aq^{1,75}$, Aq^2, *und ſo weit man will.*

Es giebt daher keine Zahl, die man nicht als ein Glied einer ſolchen Reihe betrachten könnte; denn es

 giebt

giebt keine Zahl, die nicht einer Wurzel einer gegebenen Zahl gleich wäre. Also ist zum Beyspiel: $5 = 10^{\frac{1}{1,43069}} = 10^{0,69897} = 10^{\frac{69897}{100000}} = \sqrt[100000]{10^{69897}}$. *Und daher kann* 5 *als ein Glied einer geometrischen Reihe betrachtet werden, wovon* 1 *das erste, und* 10 *das letzte Glied ist.*

15*ter Lehrsatz.*

In allen geometrischen Reihen ist das Produkt zweyer Glieder, welche sie seyn mögen, dem Produkte zweyer anderer gleich, welche von den genannten das eine von dem ersten, das andere von dem letzten gleich weit entfernt sind: und dies hat Statt, man mag Glieder nehmen, welche vor dem ersten, und nach dem letzten stehen: oder, welche zwischen beyden vorkommen: und wenn in diesem Falle die Zahl der Glieder, welche zwischen beyden vorkommen, eine ungerade Zahl ist; so ist das genannte Produkt der zwoten Macht des mittelsten Gliedes gleich.

S. p. 238. pr. 24. — L. C. §. 316.

Beweis. Vermöge des 4ten und 1sten Corollariums des 14ten Lehrsatzes.

16*ter Lehrsatz.*

In allen geometrischen Reihen, deren erstes Glied die Einheit ist (wie $1, q, q^2, q^3$ — — — — — — q^n*), ist das Produkt zweyer Glieder einem andern Gliede in derselben Reihe gleich, welches von einem der genannten Glieder gleich weit, als das andere von dem ersten Gliede der ganzen Reihe oder der Einheit entfernt ist.*

Be-

Beweis. Vermöge des 15ten Lehrſatzes.

1ſte Anmerk. Dieſe Eigenſchaft iſt einer der Gründe, worauf die Natur der Logarithmen beruht.

2te Anmerk. Man kann dieſe Reihe 1, q, q^2, q^3-- ----q^n auch auf dieſe Art ſchreiben: q^0, q^1, q^2, q^3, ---- -q^n. Siehe die zwote Anmerkung zu der 4ten Definition.

1ſtes Corollarium.

Hieraus erhellet der 8te Lehrſatz im 9ten Buche Euklids: „*Wenn mehrere Zahlen, die mit der Ein-* „*heit ihren Anfang nehmen, ſtetig proportional ſind;* „*ſo iſt die dritte eine Quadrat-Zahl, wie auch die fol-* „*gende mit Uebergehung von einer: die vierte eine* „*Cubic-Zahl, und ſo weiter mit Uebergehung von* „*zweyen, dit ſiebente iſt zugleich eine Quadrat- und* „*Cubic-Zahl, und ſo fort, mit Uebergehung von fün-* „*fen* *)," *und eben ſo auch der 9te Lehrſatz:* „*Wenn* „*die erſte Zahl nächſt der Einheit eine Quadrat- oder*

 „*eine*

*) In der griechiſchen Ausgabe, die ich oben citirte, ſtehet: „ὁ δὲ ἕβδομὸς κύβος ἅμα καὶ τετράγωνος, καὶ οἱ "πέντε διαλείποντες πάντες." Hr. Lorenz überſetzt: „und *jede ſechſte*; mit *Uebergehung von fünfen* „(iſt unter der gemeldten Bedingung) eine Quadrat- „und Cubic-Zahl zugleich." Es kömmt alſo eben dar- „auf an, wie man die Glieder zählt. In dem Original Herrn van Swindens ſteht: „het zeevende is en een qua- „draat en een cubiek getal, en dus vervolgens om het „zesde getal."

„eine Cubic-Zahl ist: so sind alle die andern in der „ganzen Reihe auch Quadrat- oder Cubic-Zahlen.“

$1, q^2, q^4, q^6, q^8$ *u. s. w.*: $1, q^3, q^6, q^9, q^{12}$ *u. s. w.*

2tes Corollarium.

Man kann diese Reihe $1, q, q^2, q^3, q^4$ - - - - - q^n *auch als solche betrachten, die schon vor* 1 *begonnen habe, auf diese Art:* $\frac{1}{q^n}$, - - - - $\frac{1}{q^3}, \frac{1}{q^2}, \frac{1}{q}, 1, q, q^2, q^3, q^4$ - - - - - q^n: *oder, welches eben darauf hinauskömmt,* 4te Erkl. 2te und 3te Anm. q^{-n}, - - - - $q^{-3}, q^{-2}, q^{-1}, q^0, q^1, q^2, q^3, q^4$ - - - - - q^n, *so daß, wenn* q *eine ganze Zahl ist, die Glieder bis zu* q^0 *oder* 1 *Brüche sind, deren Nenner Machten von* q *sind; nach der* 1 *sind die Glieder selbst die Machten von* q.

17ter Lehrsatz.

In allen geometrischen Reihen verhält sich die Summe aller vorgehenden Glieder zu der Summe aller folgenden, wie das erste Glied zum zweyten.

Eucl. 5, 12. und 7. 12. — L. C. §. 310. — St. pp. 228. 229. pr. 15.

Beweis. Vermöge des 12ten Lehrsatzes und des 4ten *Axioms.*

1stes Corollarium.

Wenn A *das erste Glied,* B *das zweyte,* Z *das letzte,* q *der Anzeiger oder der Quotient von der Thei-*

Theilung von B *mit* A, *und* S *die Summe der ganzen Reihe iſt; ſo iſt*

$$S = \frac{A^2 - Z \cdot B}{A - B}$$; *oder wenn man* n *die Anzahl der Glieder nennt,*

$$S = \frac{A^2 - A^2 q^n}{A - Aq} = \frac{A(q^n - 1)}{q - 1}$$

L. C. §. 327. — St. p. 241. pr. 27.

2tes Corollarium.

Wenn ÷ A, B, C, D, --- ---- Y, Z; *ſo iſt*

B − A : A = Z − A : A + B + C + D -------- Y; *oder in Worten ausgedrückt:* „*Wenn einige Zahlen* „*ſtetig proportionirt ſind, und man von der zwoten und* „*letzten eine Zahl abzieht, welche der erſtern gleich* „*iſt; ſo verhält ſich der Ueberſchuſs der zwoten zu der* „*erſten, wie der Ueberſchuſs der letzten zu der Sum-* „*me aller vorgehenden.*

Eucl. 9, 35.

Beweis. A : B = B : C = C : D : ----- Y : Z;

Folglich (nach N. 2. des 8ten Lehrſatzes*)

A : B − A = B : C − B = C : D − C ---- Y : Z − Y;

und daher (nach dieſem Lehrſatze)

L 4 A + B

*) und dem 7ten Lehrſatze.

$$A + B + C + \text{----} Y : \overline{B - A} + \overline{C - B} + \overline{D - C} \text{-----}$$
$$+ \overline{Z - Y} = A : B - A;$$

oder:

$A + B + C \text{----} Y : Z - A = A : B - A$; oder $B - A : A = Z - A : A + B + C \text{----} Y$.

3*tes Corollarium.*

Aus dem Lehrsatze ist bey Verwechslung
$$A + B + C \text{-----} + Y : A = B + C + D \text{-----} + Z : B;$$

aus dem 2ten Corollarium bey Verwechslung:
$A + B + C \text{-----} + Y : A = Z - A : B - A$; *und daher*
$B + C + D \text{-----} + Z : B = Z - A : B - A$, *oder*
$$B - A : B = Z - A : B + C + D \text{-----} + Z;$$

Das heißt in Worten ausgedrückt: „Wenn einige Zahlen stetig proportionell sind, und man von der zwoten „und von der letzten eine Zahl abzieht, welche der ersten gleich ist; so verhält sich der Ueberschuß der zwoten zu der zwoten, wie der Ueberschuß der letzten „zu allen folgenden zusammengenommen.“

18*ter Lehrsatz.*

Wenn vier oder mehrere Grössen (A, B, C, D *und* E) *so beschaffen sind, daß sie mit ihren Unterschieden proportionell sind* ($A : B = A - B : B - C$ *u. s. w.*) *so werden sie geometrisch proportionell seyn* (÷ A, B, C, D *u. s. w.*)

Beweis. Mit dem 7ten und 8ten Lehrsatze.

An-

Anmerk. Diefer Lehrfatz ift in der Naturlehre von grofsem Nutzen.

2te Abtheilung.

Ueber die Arithmetifche Verhältnifs-Gleichheit.

Zwote Claſſe von Definitionen.

19.

Wenn man zwo gleichartige Gröſſen *mit einander vergleicht, um zu wiſſen, um wie viel die eine die andere übertreffe, das heiſst, wie groß der Unterſchied ſey, der zwiſchen beyden gefunden wird; ſo ſagt man, daß man die arithmetiſche Verhältniſs, welche zwiſchen beyden Gröſſen Statt habe, aufſuche: und dieſer Unterſchied ſelbſt iſt dieſe arithmetiſche Verhältniſs.*

St. p. 207. 5te Def. — W, a. §, 65. *)

Anmerk. Alle die *allgemeine* Erklärungen, die im Beginn von diefem Buche gegeben worden find, finden auch hier Statt: fo wie auch die Erklärungen von *vorgehendem* und *nachfolgendem* Gliede. (9te Erkl.)

*) In dem lat. Werke §. 155. coll. §§. 322 et 323.)

20.

Arithmetische Verhältnisse werden die nehmlichen oder gleichen Verhältnisse genannt, wenn der Unterschied der Grössen, zwischen welchen sie Statt haben, der nehmliche ist; das heißt, wenn das vorgehende Glied der einen Verhältniß sein nachfolgendes Glied um eben so viel übertrifft, oder von demselben um eben so viel übertroffen wird, als das vorgehende Glied jeder der andern Verhältnisse sein nachfolgendes übertrifft, oder von demselben übertroffen wird.

Und daher sagt man von Grössen, daß sie in arithmetischer Verhältniß-Gleichheit oder Proportion stehen, oder daß sie arithmetisch verhältniss-gleich oder proportional sind, wenn die nemliche arithmetische Verhältniß zwischen ihnen Statt findet.

St. p. 208. 9te und 10te Deff. — W. a. §. 66. *)

Beyspiel. 10 : 4 = 7 : 1 arithmetisch: weil 10 — 4 = 6 und 7 — 1 = 6: und im Allgemeinen ist A : B = C : D arithmetisch,

wenn A — B = C — D; oder
B — A = D — C.

Es versteht sich von selbst, dass man in diesen beyden Verhältnissen den Unterschied der Glieder in der nemlichen Ordnung; in beyden den des nachfolgenden

*) S. die vorhergehende Citation.

den von dem vorgehenden, oder in beyden den des vorgehenden von dem nachfolgenden nehmen müſſe.

21.

Die Gröſſen ſind unzuſammenhängend (discrete) proportionell, wenn die Glieder der beyden gleichen Verhältniſſe verſchieden ſind, jedoch ſie ſind ſtetig zuſammenhängend (continue) proportionell, wenn das folgende Glied in der erſten Verhältniſs, das vorgehende in der zwoten iſt; das folgende Glied der zwoten, das vorgehende der dritten iſt, u. ſ. w. die ſtetige Verhältniſsgleichheit führt den Nahmen arithmetiſcher Reihe oder Progreſſion: und gleich weit entfernt ſtehende Glieder ſind diejenige, welche in Beziehung auf ein anderes durch eine gleiche Anzahl Glieder von dieſem getrennt werden.

Beyſpiel. Wenn A — B = B — C = C — D = D — E = E — F u. ſ. w. ſo machen A, B, C, D, E, F, u. ſ. w. eine *arithmetiſche Progreſſion* oder *Reihe* aus.

1ſte Anmerk. Man ſieht, daſs dieſe Definition mit der 12ten einerley iſt, wenn man aufs *Arithmetiſche*, wovon hier die Rede iſt, nicht Rückſicht nimmt. Die Worte: *mittlere proportionelle, dritte proportionelle, vierte proportionelle, äuſſere, mittlere, gleich weit entfernt liegende Glieder* haben hier die nemliche Bedeutung, die bey der 13ten und 14ten Definition vorkommen, welche alſo auch hier gelten.

2te

2te *Anmerk.* Eine arithmetische Progression wird mit diesem Zeichen: ÷ angedeutet. ÷ A, B, C, D, E u. s. w. bezeichnet, z. B. dass A, B, C, D, E eine arithmetische Reihe bilden.

Corollarium.

Die von Grössen, welche stetig proportionell sind, gebildete Reihe ist eine zunehmende oder aufsteigende Reihe, wenn die Grössen stets grösser und grösser werden. Sie ist eine abnehmende oder fallende Reihe, wenn die Grössen stets kleiner und kleiner werden.

Eigenschaften der *Arithmetischen Verhältniß-Gleichheiten und Progressionen.*

19*ter Lehrsatz.*

Wenn vier Grössen eine arithmetische Verhältniß-Gleichheit bilden: so ist die Summe der äußern Glieder der Summe der mittlern gleich.

St. p. 209. pr. 1. — W. a. §. 105.

Beweis. Aus der 20sten Definit.

Corollarium.

Wenn drey Grössen stetig arithmetisch proportionell sind; so ist die Summe der äussern das doppelte von der

der Summe der mittlern, und das mittlere Glied iſt alſo die halbe Summe der beyden äuſſern.

W. a. §§. 106. 107. — St. p. 210. Das Cor. der 1ſten Prop.

Anmerk. Es ergiebt ſich hieraus, wie man eine vierte, dritte, oder mittlere proportionelle Gröſſe finden könne.

20*ter Lehrſatz.*

Je weniger die Zahlen von einander verſchieden ſind, deſto weniger iſt die arithmetiſch-mittlere proportionelle Gröſſe von der geometriſch-mittleren proportionellen Gröſſe verſchieden.

L. C. Aſtronom. §. 26.

Beweis. Mit dem 1ſten Cor. des 19ten, und dem 1ſten Cor. des 5ten Lehrſatzes.

21*ter Lehrſatz.*

Wenn verſchiedene Gröſſen eine arithmetiſche Reihe bilden, ſo nehmen ſie mit einem beſtändigen Unterſchiede zu oder ab, ſo daſs eine arithmetiſche Reihe immer dieſe Form hat: $A,\ A \pm V,\ A \pm 2V,\ A \pm 3V$ ---- $A \pm \overline{(n-1)}\, V$.

St. p. 210. Cor. p. 211. dd. 16. 17. 18. 19.

Beweis. Aus der 21ſten Erklärung.

1ste *Anmerk.* Die 13te und 14te Erklärung gelten hier so gut, als sie für die geometrische Reihen Statt finden.

1stes Corollarium.

Jedes Glied ist der Summe, oder dem Unterschiede des vorgehenden Gliedes und des Anzeigers, oder der beständigen Verhältniß gleich, je nachdem die Reihe aufsteigend oder fallend ist.

2tes Corollarium.

Jedes Glied ist der Summe oder dem Unterschiede des ersten und des Unterschiedes, welchen man mit der Zahl der vorgehenden Glieder multiplicirt, gleich.

3tes Corollarium.

Die Verhältniß des ersten Gliedes zu dem dritten ist die doppelte von der des ersten Gliedes zu dem zweyten; die Verhältniß des ersten zu dem vierten ist die dreyfache von der Verhältniß des ersten zu dem zweyten, und so weiter: so, daß auch hier, jedoch in einem arithmetischen Sinne, doppelte, dreyfache u.s.w. Verhältnisse Statt finden. Siehe die 17te Erklärung und die Anmerkung, die sich darauf beziehet.

St. p. 214. pr. 5.

4tes Corollarium.

Eine aufsteigende Reihe kann mit Null beginnen, und, so weit man will, fortrücken: eine niedersteigen-

de

de Reihe kann mit Null endigen, oder noch unter der Nulle fortlaufen. In diesem Falle nehmen die Glieder, wie über der Nulle zu, und geben gleichfalls durch alle die nehmlichen Stuffen, jedoch negatif, oder verneinend betrachtet. Sie werden mit dem Zeichen (—) *minus angegeben.*

4V, 3V, 2V, V, o, —V, —2V, —3V, —4V, *u. f. w.*

Anmerk. Man mufs fich von diefen *negatifen* oder *verneinenden* Gliedern einen richtigen Begriff bilden. Man fagt gewöhnlich, dafs die negatife Gröffen kleiner als *Null* feyn. Dies ift ganz verkehrt. Das *Negatife* hat blofs auf die Lage, oder auf den Sinn, worin die Gröffen genommen werden, Beziehung. Hier bezieht es fich allein auf die Lage, und bezeichnet blofs entweder die Gröffen auf der einen oder die auf der andern Seite des Ortes, welche man annimmt. Dies wird durch die folgende einfache 148fte Figur beleuchtet werden können. Man nehme eine gerade Linie BAb an. Auf diefer werden in gleichen Entfernungen von A, fenkrechte Linien, die eine arithmetifche Reihe bilden, gezogen. Die Linie CGA, welche die Endpunkte diefer Linien vereiniget, wird fodann eine gerade Linie feyn, und durch A gehen, das heifst, fie wird die Linie BAb in A fchneiden, die Reihe arithmetifcher Linien CB, FO, u. f. w. endigt daher in A, und das letzte Glied ift *Null.* Allein wenn man die Linie CA verlängert, und auf BAb, an der andern Seite von A, gleiche Stücke At, ts, sr, rq, qp nimmt; und die Lothlinien tl, sk,

sk, ri, qh, pg auf der untern Seite zieht; so werden sie daselbst eine Reihe bilden, welche der vorigen in jeder Rücksicht gleich, und mit ihr in Verbindung stehen wird. Indessen nennt man diese Glieder der Reihe, in Hinsicht auf die erstern, *negatif*, weil sie auf der andern Seite, und also in einer entgegengesetzten Richtung oder Lage genommen werden.

5tes Corollarium.

Die natürliche Zahlen 0, 1, 2, 3 *u. s. w. bilden eine arithmetische Reihe.*

22ter Lehrsatz.

In einer arithmetischen Reihe ist die Summe zweyer Glieder der Summe zweyer anderer gleich, welche letztere jedoch von den ersteren in gleicher Entfernung stehen, so daß nemlich das erste der letztern eben so weit vor *oder* nach *dem einen der erstern steht, als ihr zweytes* nach *oder* vor *dem andern derselben steht.*

St. p. 212. pr. 3.

Beweis. Mit dem vorgehenden Lehrsatz.

Corollarium.

Wenn die Zahl der Glieder ungerade ist; so ist die Summe zweyer Glieder, die vom mittelsten gleich weit entfernt sind, dem Doppelten dieses mittelsten gleich. Folglich ist das mittelste die Hälfte der Summe dieser zwey anderen Glieder.

St.

St. p. 213. Corollarium.

23ter *Lehrſatz.*

Wenn Null das erſte oder das letzte Glied einer arithmetiſchen Reihe iſt; ſo iſt die Summe zweyer Glieder einem dritten Gliede gleich, welches eben ſo weit von einem dieſer zwey Glieder entfernt liegt, als das andere von dem Beginne oder Ende der Reihe, oder von der Null.

Beweis. Mit dem vorhergehenden Lehrſatze.

1ſte *Anmerk.* Das nehmliche gilt daher auch für die Reihen, welche auf der andern Seite der Null fortgeſetzt werden; denn man kann ſie betrachten, als beſtehen ſie aus zwoen Reihen.

2te *Anmerk.* Dieſer Lehrſatz iſt der zweyte Hauptſatz, worauf die Natur der Logarithmen ſich gründet.

24ſter *Lehrſatz.*

Die Summe aller Glieder einer arithmetiſchen Reihe iſt der Summe der beyden äuſſern Glieder, wenn ſie mit der Hälfte der Zahl der Glieder multiplicirt wird, gleich.

St. p. 213. pr. 4.

Beweis. Mit dem 22ſten Lehrſatz.

Corollarium.

Die Summe ist also auch der Hälfte der Zahl von Gliedern gleich, welche mit der Summe oder dem Unterschiede des doppelten des ersten Gliedes und des Unterschiedes multiplicirt mit der Zahl der Glieder weniger eins, multiplicirt wird. $S = \frac{(2A + \overline{n-1}V)^n}{2}$.

3te Abtheilung.

Ueber die Harmonische Verhältniss-Gleichheit.

Dritte Classe von Erklärungen.

22.

Man sagt von dreyen Grössen (A, B, C), *sie seyn* ***harmonisch*** *proportionell, wenn die* ***geometrische*** *Verhältniss der ersten zu der dritten,* (A : C) *der* ***geometrischen*** *Verhältniss des Unterschiedes zwischen der zwoten und der ersten* (B — A) *zu dem Unterschiede zwischen der dritten und der zwoten* (C — B) *gleich ist.*

Das heisst: wenn $A : C = B - A : C - B$ *ist; so sind* A, B, C, ***harmonisch*** *proportionell.*

Horrebow §. 15. — Lami. p. 461.

1stes Corollarium.

Es erhellet, daß, wenn das zweyte Glied größer, als das erste ist; das dritte auch grösser, als das zweyte seyn wird. Folglich ist eines der äussern Glieder das gröste und das andere das kleinste der drey Glieder. Daher geben auch einige diese Erklärung: „drey Zahlen stehen in einer harmonischen Verhältniß-Gleichheit, wenn sich die kleinste zu der grösten, wie der Ueberschuß der mittlern über die kleinste zu dem Ueberschuß der grösten über die mittlere verhält.“

2tes Corollarium.

Drey Zahlen können keine harmonische Verhältniß-Gleichheit bilden, wenn der Unterschied der mittlern über die kleinste größer als die kleinste selbst ist.

Nach der 22sten Erklärung und dem 9ten Lehrsatze.

Lami p. 463.

3tes Corollarium.

Hat man auf die Vorschrift dieses 2ten Corollariums die nöthige Rücksicht genommen; so erhellet, daß man zu zwo gegebenen Zahlen eine dritte finden kann, welche mit den zwo andern in einer harmonischen Verhältniß-Gleichheit stehet.

Lami pr. 1. p. 461.

149ste Fig.

1ste Anmerkung. Wenn man drey Linien AD, AC, AB hat, so werden sie, wenn AD:

 AB

AB=AD—AC:AC—AB ist, harmonisch proportionell seyn.

Wenn nun AD die gröste, AC die zwote, und AB die kleinste ist, und man auf der Linie AD nimmt AC=AC, AB=AB; so ist AD—AC=CD, und AC—AB=BC, und daher AD:AB=CD:BC oder

AD:CD=AB:BC.

Man sagt alsdann, daſs diese Linie *harmonisch* geschnitten sey. Hieraus folgt diese Erklärung des Herrn *La Hir* (Section Con. Libr. 1. def. 1.): „von einer geraden Linie AD sagt man, „sie sey *harmonisch* getheilt, wenn die ganze „Linie AD sich zu einem ihrer äusseren Stü„cke (AB oder CD) ihr anderes äusseres Stück „(CD oder AB) zu ihrem mittlern Stücke „verhält, oder, wenn das Rechteck aus der „ganzen Linie und ihren mittlern Stücke, dem „Rechtecke ihrer äussern-Theile gleich ist. Hierauf gründet sich die Auflösung der 22sten Aufgabe des 1sten Buchs der Probleme.

2te *Anmerk.* Man nennt diese Verhältniſs-Gleichheit die *harmonische*, weil sie die Grundlage der Harmonie ist. Drey, gleich dicke und gleich gespannte Saiten geben die drey vornehmste, den Oktav-, Quint- und Quart-Ton, wenn ihre Längen sich wie 3, 4, 6, verhalten. Die zwo, welche sich wie 3 zu 6 verhalten, geben den Oktavton, die zwo, die sich wie 4 zu 6 verhalten, den Quintton, und die zwo, welche sich wie 3 zu 4 verhalten, den Quartton

ton an. Die Zahlen aber 3, 4, 6, ſind ſo beſchaffen, daſs 3 : 6 = 4 — 3 : 6 — 4.

23.

Verſchiedene Zahlen machen eine harmoniſche Reihe, wenn die erſte zu der zwoten, die auf ſie folgt, ſich, wie der Unterſchied zwiſchen der mittlern und der erſten zu dem Unterſchiede zwiſchen der genannten zwoten und der mittlern, verhält, das heiſst, A, B, C, D, E *u. ſ. w. werden eine harmoniſche Reihe machen, wenn*

A : C = B — A : C — B
B : D = C — B : D — C
C : E = D — C : E — D
D : F = E — D : F — E; *u. ſ. w.*

Anmerk. *Wolf* giebt in ſeiner lateiniſchen *Algebra* §. 186. folgende Erklärung von vier *harmoniſchen* Proportional - Gröſſen: „Vier Gröſſen, ſagt er, ſind harmoniſch proportionell, wenn der Unterſchied zwiſchen der erſten und der zwoten ſich zu dem Unterſchiede zwiſchen der dritten und vierten, wie die erſte Gröſſe zu der vierten, verhält.“ *) Allein dann muſs

 man

*) §. 186. Def. 13. *Tres vel quatuor quantitates dicuntur harmonice proportionales, ſi in priori caſu differentia primi et ſecundi fuerit ad differentiam ſecundi atque tertii, ut primus ad tertium; in caſu poſteriore differentia primi et ſecundi ad differentiam tertii et quarti, ut primus ad quartum.* Ex gr. 10, 16 et 40. ſunt in proportione harmonica: eſt enim 6 : 24 = 10 : 40. *Si termini*

man dieſe Zahlen unzuſammenhängend, und als wären ſie nicht in einer *harmoniſchen* Reihe, anſehen. Man würde ſonſt in viele Fehler verfallen, und deswegen halten wir dieſe Erklärung für ungenau. Der Herr *Wolf* kann zwar eine ſolche Verhältniſs-Gleichheit eine *harmoniſche* Verhältniſs-Gleichheit nennen: allein ſie iſt nicht diejenige Verhältniſs-Gleichheit, welche von allen andern Schriftſtellern als ſolche angegeben wird. Dies wird aus der 2ten Anmerkung zu dem 29ſten Lehrſatze deutlicher erhellen.

Corollarium.

Wenn Zahlen harmoniſch proportionell ſind; ſo werden es ihre Produkte oder Quotienten auch ſeyn, wenn man ſie alle mit der nehmlichen Zahl multiplicirt oder dividirt.

Lami. p. 463. pr. 3.

25ſter Lehrſatz.

Wenn die zwote von zwoen gegebenen Zahlen größer als die erſte iſt, ſo kann man nicht immer Zahlen finden, die mit der vorhergehenden eine nach Belieben aufſteigende Reihe ausmachen werden. Allein dies kann immer geſchehen, wenn die zwote Zahl kleiner als die erſte iſt: und daher kann eine niederſteigende Reihe, ſo weit als man will, verlängert werden.

Beweis.

termini proportionales in caſu priora continuentur; oritur progreſſio harmonica.

Beweis. Es erhellet aus dem 3ten Corollarium der 22ſten Erklärung, daſs man immer eine dritte harmoniſche proportionale zu zwoen Zahlen finden könne. Allein hätte man ſchon zwo, drey u. ſ. w.; ſo iſt es nicht gewiſs, ob man eine folgende finden kann; denn in der Verhältniſs-Gleichheit $C:E=D-C:E-D$, worin $E>C$, muſs $E-D>D-C$: folglich $E+C>2D$ ſeyn. Allein da $E>D$ und $C<D$ iſt; ſo iſt dieſes nicht immer möglich. Wenn aber $B<A$ iſt; ſo wird die Verhältniſs-Gleichheit ſeyn $C:A=B-C:A-B$; und wenn daher A und B gegeben ſind; ſo iſt $A-B<A$, folglich muſs $B-C<C$, oder $C>\frac{B}{2}$ ſeyn, welches immer möglich iſt, weil C noch nicht gegeben iſt. Und ſo ferner: $E:C=D-E:C-D$. Da nun $C-D<C$; ſo iſt auch $D-E<E$, oder $E>\frac{D}{2}$, welches immer möglich iſt: und folglich wird jedes Glied immer gröſser als die Hälfte des vorhergehenden ſeyn.

26ſter Lehrſatz.

In allen harmoniſchen Reihen iſt immer das Produkt der zwey erſten Glieder zu dem der zwey letzten, wie der Unterſchied der beyden erſten zu dem der beyden letzten.

Beweis. Wenn man die Glieder der Verhältniſs-Gleichheiten von der 23ſten Erklärung unter einander und in ihrer Ordnung multiplicirt; ſo werden die Produkte proportionell ſeyn (nach dem 10ten Lehrſatze): dieſe Produkte werden nach dem 4ten *Axiom* folgende Verhältniſs-Gleichheit angeben

$$AB:EF=B-A:F-E.$$

27ster Lehrsatz.

Wenn A, B, C, D, E *u. s. w. eine harmonische Reihe bilden, und* Y *das* n*ste Glied und* Z *das* $\overline{n+1}$ *ist; so hat man:*

$$B-n(B-A):B-A=Y:Z-Y.$$

Beweis. $A:B=B-A:C-B$ *); und folglich
$$A:B-A=B:C-B;$$
und $B:B-A=2C-B:C-B;$
$$B-(B-A):B-A=C:C-B$$
und $B-2(B-A):B-A=B:C-B.$

Welches zu beweisen war. 1°.

Weiter $B:C-B=D:D-C;$
folglich $B-2(B-A):B-A=D:D-C;$
und folglich $B-3(B-A):B-A=C:D-C;$

W. Z. B. W. 2°.

Weiter $C:D-C=E:E-D;$
folglich $B-3(B-A):B-A=E:E-D;$
und folglich $B-4(B-A):B-A=D:E-D;$

W. Z. B. W. 3°.

und so weiter.

Corollarium.

Aus diesem und dem 8ten Lehrsatze No. 1. folgt:
$$B-\overline{n-1}(B-A):B-n(B-A)=Z:Y;$$

folg-

*) S. die 23ste Definition.

folglich für das dritte Glied

$$B-(B-A):B-2(B-A)=C:B$$

oder $2A-B:A=B:C$.

Dies iſt der 11te Lehrſatz *Wolfs* in ſeiner lateiniſchen Algebra §. 187. *) „Wenn drey Zahlen „*harmoniſch* proportionell ſind; ſo iſt der Unterſchied „zwiſchen der zwoten und dem Doppelten der erſten „zu der erſten, wie die zweyte zu der dritten:“ und umgekehrt. S. auch Horrebow §. 30.

2°. Aus $2A-B:A=B:C$ *folgt*

$$C:A=B:2A-B$$

und $C+A:C=2A:B$

oder $C+A:2A=C:B$.

Dies iſt das *Theorem Wolfs* im 191ſten Paragraphen ſeiner Analyſis: „Wenn drey Gröſſen har„moniſch proportionell ſind; ſo verhält ſich die Sum„me der erſten und letzten zu dem Doppelten der „erſten, wie ſich die letzte zur mittlern verhält.“ Es kann auch auf folgende Art ausgedrückt werden, und dann giebt es die Theoreme bey *Horrebow* in §§. 23. 22.: „Wenn drey Zahlen harmoniſch propor„tionell ſind; ſo verhält ſich die Summe der äuſsern „zu einer der äuſsern, wie die andere äuſsere ſich „zu der Hälfte der mittlern, oder wie das Doppel„te der andern äuſsern ſich zu der mittlern verhält.“

Anmerk. Das Theorem Wolfs im 192ſten §. ſ. Anal., „daſs, wenn vier Gröſſen harmoniſch „proportionell ſind, die dritte ſich zur vierten,

 „wie

*) in ſect. II, de Algebra Cap. I.

„wie der Unterschied zwischen der zwoten und „dem Doppelten der ersten zu dem ersten verhält," ist in dem Sinne unserer Erklärung falsch, da es auf einer unbestimmten Definition beruht, wovon wir in der Anmerkung zu unserer 23sten Erklärung gesprochen haben.

28ster Lehrsatz.

Wenn Z das nte Glied einer harmonischen Reihe ist, wovon A das erste, und B das zweyte Glied bezeichnet; so ist

$$Z = \frac{A \times B}{B - (n-1)(B-A)} = \frac{AB}{B + \overline{n-1}(A-B)}.$$

Beweis. $A : C = B - A : C - B$;

Folglich ist das dritte Glied oder $C = \frac{AB}{2A - B}$

$$= \frac{AB}{B + 2A - 2B} = \frac{AB}{B - 2(B-A)}.$$ W. Z. B. W. 1°.

$$B : D = C - B : D - C$$

Folglich $D = \frac{BC}{2B - C} = \frac{B}{2B - \frac{AB}{2A - B}} \times \frac{AB}{2A - B} =$

$$= \frac{AB^2}{4AB - 2BB - AB} = \frac{AB}{3A - 2B} = \frac{AB}{B - 3(B-A)};$$

W. Z. B. W. 2°.

$$C : E = D - C : E - D;$$

Folglich ist das vierte Glied, oder $E = \frac{DC}{2C - D}$ oder

AB

$$E = \frac{\frac{AB}{B-3(B-A)} \times \frac{AB}{B-2(B-A)}}{\frac{2AB}{B-2(B-A)} - \frac{AB}{B-3(B-A)}} =$$

$$\frac{A^2 B^2}{AB(2B-6(B-A)-B+2(B-A)} = \frac{AB}{B-4(B-A)}.$$

W. Z. B. W. 3°.

Und ſo weiter für alle Glieder: und folglich für n te Glied

$$Z = \frac{AB}{B-\overline{n-1}(B-A)} = \frac{AB}{B+\overline{n-1}(A-B)}.$$

1ſtes Corollarium.

Hieraus folgt 1ſtens, daß man jedes Glied einer harmoniſchen Reihe finden kann, wenn man die zwey erſten Glieder kennt, und weiß, das wie vielte Glied das verlangte iſt; 2tens, daß man, wenn ein Glied nach Belieben, und die zwey erſten Glieder gegeben ſind, finden kann, das wie vielte das verlangte Glied iſt.

2tes Corollarium.

Hieraus ergiebt ſich, daß man, wenn das zweyte Glied größer als das erſte, und die Reihe alſo eine zunehmende Reihe iſt, ſie nicht ſo weit, als man wollte, verlängern kann; denn $B - \overline{n-1}\,(B - A)$ *würde endlich* $= 0$ *werden können; daß dies hingegen möglich iſt, wenn* $B < A$, *oder die Reihe abnehmend iſt, wie wir dieſes bereits im 25ſten Lehrſatz gezeigt haben.*

Ueber-

Ueberhaupt, wenn die Reihe eine zunehmende Reihe, und der Unterschied (B — A) *der zwey ersten Glieder ein gerader Theil von dem zweyten Theile* B *ist; so ist die Reihe endlich; denn alsdann wird* $\overline{n-1}$ (B — A) *endlich dem* B *gleich; folglich wird der Nenner* $B - \overline{n-1}\,(B - A)$ *Null: und der Bruch, von welchem diese Zahl der Nenner ist, kann nicht ausgedrückt werden.*

Wenn der Unterschied B — A *ein ungerader Theil von* B *ist; so wird man endlich auf eine Zahl kommen, die so beschaffen ist, dass* B — m (B — A) *noch kleiner, als* B *und folglich, daß der Zähler* B — m (B — A) *noch positif, dass aber* $\overline{m+1}$ (B — A) *größer als* B, *und folglich der Nenner* $B - \overline{m+1}\,(B - A)$ *negatif ist; wodurch dieses Glied und alle übrige auch minus seyn werden.*

A oder das erste Glied sey zum Beyspiel 20; B oder das zweyte 36; alsdann ist $B - A = 16$ und $B \times A = 720$. Die Glieder werden seyn

$$20,\ 36,\ \frac{720}{36-2\times16},\ \frac{720}{36-3\times16},\ \frac{720}{36-4\times16},\ \text{u. s. w.}$$

$$20,\ 36,\ \frac{720}{4},\ \frac{720}{-12},\ \frac{720}{-28},\ \frac{720}{-44},\ \text{oder}$$

$$20,\ 36,\ 180,\ -60,\ -25\tfrac{5}{7},\ -16\tfrac{4}{11};$$

und man hat alsdann zum Beyspiel:

$$36 : -60 = 180 - 36 : -60 - 180;\ \text{oder}$$

$$36 : -60 = 144 : -240;$$

$$\text{oder}\ 6 : -10 = 12 : -20;$$

Eben so:

$$180 : 25\tfrac{5}{7} = 180 - (-60) : -60 - (-25\tfrac{5}{7});$$

oder:

oder:

$$180 : -\tfrac{180}{7} = 180 + 60 : -60 + 25\tfrac{5}{7};$$
$$7 : -1 = 240 : -34\tfrac{2}{7};$$
$$7 : -1 = 240 : -\tfrac{240}{7}; \text{ oder}$$
$$7 : -1 = 7 : -1;$$ und fo weiter in allen Fällen, fo man anders auf die Zeichen +, — gehörig Acht giebt.

29fter Lehrfatz.

Wenn man eine und diefelbe Gröffe mit den Gliedern einer arithmetifchen Reihe hinter einander dividirt: fo werden die Quotienten eine harmonifche Reihe bilden.

Horrebow §. 10. — Lami p. 465.

Beweis. Aus dem vorhergehenden Lehrfatze erhellet, dafs eine harmonifche Reihe A, B, C, D, E, u. f. w. auf folgende Art ausgedrückt werden könne,

$$\frac{AB}{B}, \frac{AB}{B+(A-B)}, \frac{AB}{B+2(A-B)}, \frac{AB}{B+3(A-B)}$$
$$\frac{AB}{B+4(A-B)}, \text{ - - - - - - } \frac{AB}{B+\overline{n-1}(A-B)}.$$

Allein AB ift eine und diefelbe Gröfse, und (nach dem 21ften Lehrfatze) machen B, B + (A — B), B + 2 (A — B), B + 3(A — B) - - - - - B + $\overline{n-1}$ (A — B) eine arithmetifche Reihe: woraus fich der Lehrfatz ergiebt.

1stes Corollarium.

Zahlen, die das Umgekehrte von den Gliedern einer arithmetischen Reihe sind, bilden eine harmonische Reihe.

1ste Anmerk. Wenn man, wie *Horrebow*, diesen Lehrsatz als Definition einer harmonischen Progression annimmt *); so kann man aus ihm, so wohl unsere Erklärung als die vorhergehenden Lehrsätze ableiten.

2te Anmerk. Aus diesem Lehrsatz erhellet hinlänglich, dass die Definition, welche *Wolf* giebt, nicht gelten kann **); Denn man hat hier nicht:

$$A : \frac{AB}{B+3(A-B)} = A-B : \frac{AB}{B+2(A-B)} - \frac{AB}{B+3(A-B)};$$

Denn sonst müsste man haben:

$$A : A-B = \frac{1}{B+3(A-B)} : \frac{1}{B+2(A-B)} - \frac{1}{B+3(A-B)} = B+2(A-B) : A-B = 2A - B : A-B;$$

welches falsch ist.

2tes

*) Ich verweise hier auf die oben versprochene Abhandlung.

**) Vergl. die 23ste Erklärung.

2tes Corollarium.

Wenn man aus zwoen harmoniſchen Reihen Glieder wegnimmt, die gleich weit von einander entfernt ſind; ſo werden ſie ebenfalls eine harmoniſche Reihe bilden.

Horrebow §. 12.

Beweis. Dies erhellet daraus, daſs die Nenner immer in einer arithmetiſchen Reihe bleiben.

30ſter Lehrſatz.

Wenn drey Zahlen in einer arithmetiſchen Verhältniß-Gleichheit ſtehen; ſo ſind die Producte der erſten mit der zwoten, der erſten mit der dritten, und der zwoten mit der dritten harmoniſch proportionell.

Lami p. 464. pr. 4.

Beweis. $\div$ I, K, L; folglich

$$I + L = 2K;$$

$$I - K = K - L;$$

allein I. K : K. L = I ; L (4tes Ax.)

folglich I. K : K. L = I (K — L) : L (I — K) (4tes Ax.);

oder IK : KL = IK — IL : IL — KL;

IK, IL, und KL harmoniſch proportionell.

31ſter Lehrſatz.

Wenn man zwiſchen zwoen Zahlen IK, *eine arithmetiſche mittlere Proportional-Gröſse* (A), *und ebenfalls eine harmoniſche mittlere Proportional-Grö-*

ſse

ſse (H) *nimmt*; *ſo werden dieſe vier Zahlen eine geometriſche Verhältniſs-Gleichheit bilden, wovon die zwo gegebenen die äuſſern, und die zwo gefundenen die mittlern Glieder ſeyn werden.*

Beweis. Vermöge der Annahme iſt $A = \frac{I + K}{2}$

und $I : K = I - H : H - K$, oder

$$H = \frac{2 KI}{I + K}; \text{ nun}$$

$1 : I = K : KI$; (4tes Ax.);

folglich (nach des 10ten Lehrſatzes 2tem Corollarium)

$$I + K : I = K : \frac{KI}{I + K}, \text{ oder}$$

$$\frac{I + K}{2} : I = K : \frac{2 KI}{I + K};$$

folglich

$$A : I = K : H.$$

1ſte allgemeine Anmerkung.

Die Lehre der harmoniſchen Verhältniſs-Gleichheit iſt in vielen Materien der Phyſik von groſser Wichtigkeit. Man kann hierüber *Horrebow* am angeführten Orte §. 45. u. ff., wie auch meine *Poſitiones phyſicas*, Libr. III. §. 105. Libr. IV. §. 115. §. 294. §. 233. §. 361. nachſchlagen.

2te allgemeine Anmerkung.

Es giebt noch eine andere Art von Verhältniſs-Gleichheit, welche *Wolf* die *gegen-harmoniſche (contra harmonicam)* nennt, (ſ. deſſen lateiniſche Algebra §. 193.) drey Zahlen ſind nehmlich *gegen-harmoniſch proportionell*, wenn der Unterſchied zwiſchen der erſten und zwoten ſich zu dem Unterſchiede zwiſchen der zwoten und dritten, wie die dritte zu der erſten verhält. Folglich ſind A, B, C, *gegen-harmoniſch proportionell*, wenn

$A - B : B - C = C : A$; und folglich iſt
$C^2 - BC = BA - A^2$, oder
$C^2 + A^2 = B(C + A)$; und folglich
$\frac{C^2 + A^2}{C + A} = B$; folglich: Wenn man die Summe der Quadrate zwoer Zahlen mit der Summe dieſer Zahlen dividirt; ſo iſt der Quotient die mittlere *gegen-harmoniſch*-proportionelle Zahl zwiſchen dieſen Zahlen.

S. weiter *Wolf* §§. 193 — 196.

4te Abtheilung.

Ueber die Logarithmen.

24ſte Erklärung.

Wenn man zwo Reihen Zahlen hat, wovon die eine eine geometriſche, die andere eine arithmetiſche

 Reihe

Reihe ist, und man sie dergestalt stellt, daß jedem Gliede der geometrischen Reihe ein Glied der arithmetischen Reihe gegenüber steht; so werden die Zahlen der arithmetischen Reihe überhaupt die Logarithmen der Zahlen von der geometrischen Reihe, jede von der Zahl, welcher sie gegenüber steht, genannt.

Zum Beyspiel: Geometrische Reihe 3, 6, 12, 24, 48,
Arithmetische Reihe 1, 2, 3, 4, 5,

Alsdann ist 1, 2, 3, 4, 5, *jede in ihrem Range der Logarithmus von* 3, 6, 12, 24, 48.

St. S. 393. 1ste Def. — W. Tr. §. 21, 22. *)

Anmerk. Wir werden in der ersten Anmerkung zu dem folgenden Lehrsatze einen genauern Begrif von Logarithmen geben.

32ster Lehrsatz.

Wenn man die geometrische Reihe

a^0 (*oder* 1), a^1, a^2, a^3, a^4, ------- a^n

hat; so sind die Anzeiger 0, 1, 2, 3, 4, *u. s. w. Die Logarithmen von den Zahlen* a^0, (*oder* 1), a, a^2, a^3, *u. s. w. jeder in seiner Ordnung.*

St. S. 395. 2te Def.

Be-

*) Ich fahre fort, die Citata aus Wolf nach seinen Elementis Matheseos universae, Tom. 1 Halae Magdeburgicae MDCCXXX. der Ausgabe, die ich besitze, anzugeben. Ich führe also hier an: W. Arith. §. 334. Def. 64.

Beweis. Nach der 24sten Erklärung des 14ten Lehrsatzes 4tem Corollarium, und des 21sten Lehrsatzes 5tem Corollarium.

1ste Anmerk. Bey der Berechnung, und also bey dem Gebrauche der Logarithmen setzt man immer voraus, daſs die Einheit (und folglich a^0. S. der 4ten Erkl. 2te Anm.) das erste Glied der geometrischen Reihe, und *Null* folglich das erste Glied der arithmetischen Reihe, oder der Reihe der Logarithmen sey. Folglich sind in einem bestimmtern und genauern Sinne die Logarithmen: „Zahlen in einer arithmetischen „Reihe, welche mit Null anfangen, und den „Zahlen einer geometrischen Reihe, die mit 1 „beginnt, gegenüberstehen.“

1stes Corollarium.

Folglich ist überhaupt, wenn a *die Zahl ist, wovon der Logarithmus* 1 *ist*, $1 = Log.\ a$; $0 = Log.\ a^0$. $= Log.\ 1$; *und* $x = Log.\ a^x$.

2te Anmerk. Man kann die Zahl a, von welcher 1 der Logarithmus seyn wird, nach Belieben annehmen. Allein es hängt von dieser Zahl ab, welches die Zahlen seyen, von denen 2, 3, 4, u. s. w. die Logarithmen seyn werden, da diese Zahlen die 2te, 3te, 4te Machten u. s. w. von a sind. Dies ist der Grund, warum man diese Zahl, wovon 1 der Logarithmus ist, die *Grundlage* oder *basis* von diesem *System* von Logarithmen nennt, und daher kann es so viele verschiedene Systeme von Logarithmen geben,

als man verschiedene Zahlen als Grundlagen annimmt.

2tes Corollarium.

Wir haben in dem 7ten Corollarium des 14ten Lehrsatzes gesehen, daß man die Geometrische Reihe

$$A,\ Aq,\ Aq^2 \text{ - - - - - - - - } Aq^{n-1}$$

auf der andern Seite von A *verlängern kann; folglich, indem man* A = 1 *setzt; so hat man*

$$q^{-(n-1)} \text{ - - - } q^{-4},\ q^{-3},\ q^{-2},\ q^{-1},\ q^0,\ q,\ q^2,\ q^3,\ q^4,$$

oder

$$\frac{1}{q^{n-1}} \text{ - - - } \frac{1}{q^5},\ \frac{1}{q^4},\ \frac{1}{q^3},\ \frac{1}{q^2},\ \frac{1}{q},\ 1,\ q,\ q^2,\ q^3,\ q^4, \text{ - - - } q^{n-1}.$$

Und folglich werden $-(n-1)$, - - - $-4, -3, -2, -1$ *die Logarithmen der Brüche* $\frac{1}{q^{n-1}}$ - - - - - $\frac{1}{q^4}, \frac{1}{q^3}, \frac{1}{q^2}, \frac{1}{q}$ *seyn.*

3tes Corollarium.

Wenn man ebenfalls andere mitttlere proportionelle Glieder zwischen zweyen Gliedern, zum Beyspiele zwischen 1 *und* q, q *und* q^2 *nimmt, als:*

$$1,\ q^{0,25},\ q^{0,5},\ q^{0,75},\ q^1,\ q^{1,25},\ q^{1,5},\ q^{1,75},\ q^2$$ *u. s. w.*

so werden 0, 25, 0, 5, 0, 75, 1, 25, 1, 5, 1,75, *alle in ihrer Ordnung die Logarithmen dieser Zahlen seyn; und folglich giebt es keine Zahl, sie sey, welche sie wolle, man könne dann ihren Logarithmus bestimmen; denn sie fällt gewiß zwischen zwey Glieder von der Reihe* q, q, q^3, *u. s. w.*, *man mag auch eine*

Zahl

Zahl für q *annehmen, welche man wolle, und es giebt keine Zahl, die nicht irgend eine Macht oder Wurzel der Zahl* q *seyn.* (8tes Corollarium des 14ten Lehrsatzes.)

33ster Lehrsatz.

Die Logarithmen (x *und* y) *einer und derselben Zahl* (z), *welche zu verschiedenen Systemen von Logarithmen gehören, stehen immer in einer beständigen Verhältniß.*

H. III. §. 208.

Beweis. Das eine System sey

$$a^0, a^1, a^2, a^3 \text{------} a^x$$

Das andere

$$b^0, b^1, b^2, b^3 \text{------} b^y.$$

Man nehme an, daſs $a^x = Z = b^y$ seyn; wie zum Beyspiel, wenn $a = 4$, und $b = 2$ ist; so ist $a^4 = 256$, und $b^8 = 256$; folglich $a^4 = b^8 = 256 = Z$, wenn nun $a^x = Z$; $b = Z$; so ist $a^x = b^y$; x Log. $a = y$ Log. b, und folglich $x : y =$ Log. b : Log. a, das heiſst, in einer beständigen Verhältniſs.

34ster Lehrsatz.

Die Summe der Logarithmen zwoer Zahlen ist der Logarithmus des Produkts dieser beyden Zahlen, welche man mit einander multiplicirt hat.

St. S. 396. Iste pr. — W. t. §. 23. *)

 Beweis.

*) Arithm. §. 337. Theor. 68.

Beweis. Mit dem 32sten, 23sten und 16ten Lehrsatze.

1stes Corollarium.

Der Logarithmus des Produkts aus verschiedenen Zahlen ist die Summe der Logarithmen von jeder dieser Zahlen.

2tes Corollarium.

Der Logarithmus irgend einer Macht von einer Zahl b, *das heißt von* b^n *ist das Produkt des Anzeigers* n, *den man mit dem Logarithmus der Zahl* b *multiplicirt.*

Beweis. Nach dem 1sten Corollarium und der 4ten Erklärung.

St. S. 397. 2te Pr. — W. t. §. 25. *)

3tes Corollarium.

Wenn man also eine Tabelle von den Logarithmen aller Zahlen gemacht hat; so wird man, indem man sieht, welche Zahl der Summe der Logarithmen von zwoen oder mehreren Zahlen gegenüber steht, zugleich wissen, daß diese Zahl das Produkt dieser Zahlen ist; und man wird daher das sehr beschwerliche Geschäfte der Multiplication auf die sehr leichte Mühe von Addition zurückbringen.

*) Arithm. §. 341. Cor. 4. Theor. 63.

35ster Lehrsatz.

Der Unterschied der Logarithmen zwoer Zahlen ist der Logarithmus des Quotienten, welcher aus der Division dieser zwo Zahlen erwächst.

St. S. 398. Pr. 3. — W. t. §. 33. *).

Beweis. Mit dem 34sten Lehrsatze, verbunden mit der 3ten Anm. zu der 4ten Definition, *oder*: mit des 32sten Lehrsatzes 2tem Corollarium, dem 23sten und 16ten Lehrsatze.

1stes Corollarium.

Der Logarithmus der Wurzel n *aus irgend einer Zahl* b (*oder der* $\sqrt[n]{b}$, *oder* $b^{\frac{1}{n}}$) *ist der* nte *Theil des Logarithmus dieser Zahl selbst.* (2tes Corollarium des vorhergehenden Lehrsatzes, verbunden mit der 3ten Anmerkung zu der 4ten Definition. **)

St. S. 399, 4ter Pr. — W. t. §§. 27 — 31.

2tes Corollarium.

Wenn man eine Tabelle hat, worin sich die Logarithmen aller Zahlen befinden; so wird man die beschwerliche Arbeit von Division *in eine* Subtraktion, *und die noch beschwerlichere Arbeit von* Wurzel-Ausziehung *in eine leichte* Division *verwandeln können.*

*) §. 248. Theor. 64.

**) Dieses Corollarium stünde, nach meiner Meinung, besser bey jenem 2ten Cor. des 34sten Lehrsatzes.

3tes Corollarium.

Log. $\frac{1}{a}$ *ist folglich* = *Log.* 1 — *Log.* a; *folglich ist Log.* $\frac{b}{a}$ = *Log.* b x $\frac{1}{a}$ = *Log.* b + (*Log.* 1 — *Log.* a) *oder* = *Log.* b — *Log.* a. *Man nennt das arithmetische Complement eines Logarithmus den Rest, welchen man erhält, wenn man einen Logarithmus von* 0 *abziebt; dieser Rest ist daher* (32sten Lehrsatzes 2tes Corollarium) *negatif. Folglich entspricht die Subtraktion eines Logarithmus der Addition seines arithmetischen Complements.* (S. am Ende dieses Buchs die Nachricht No. 6.)

36ster Lehrsatz.

Wenn drey Zahlen von einander sehr wenig verschieden sind; so werden sich die Unterschiede der Logarithmen, so viel möglich, der nehmlichen Verhältniß nähern, worinnen die der Zahlen stehen, von welchen sie die Logarithmen sind.

Beweis. Nach dem 32sten und 22sten Lehrsätzen.

37ster Lehrsatz.

In allen Logarithmen-Systemen sind die Logarithmen der Basis, und aller Zahlen, welche Machten der Basis sind, gegeben. Sie sind nehmlich ganze Zahlen, die natürliche Zahlen 1, 2, 3 *u. s. w. selbst. Die Logarithmen aller anderer Zahlen sind Brüche, und zwar ächte Brüche für alle Zahlen, welche zwischen der Einheit und der Basis enthalten sind, un-*

ächte Brüche für alle übrige Zahlen, welche grösser als die Basis sind.

Beweis. Mit dem 32sten Lehrsatze, und dessen 2ten Corollarium.

Corollarium.

Bey unsern gewöhnlichen Logarithmen, welche man Tabellen-Logarithmen nennt, weil sie den Logarithmus-Tabellen ihre Entstehung gaben, oder welche man auch mit dem Namen Briggischer Logarithmen beehrt, weil sie von einem Engländer, Namens Heinrich Briggs berechnet wurden, ist 10 *die Basis; folglich ist, wie immer,* 0 *der Logarithmus von* 1; 1 *der Logarithmus von* 10^1 *oder* 10; 2 *der Logarithmus von* 10^2 *oder* 100; 3 *der Logarithmus von* 10^3 *oder* 1000; 4 *der Logarithmus von* 10^4 *oder* 10000, *und so weiter der übrige Theil eines jeden Logarithmus wird durch einen Decimal-Bruch ausgedrückt; folglich sind die Logarithmen für alle Zahlen zwischen* 1 *und* 10, 0 *nebst so vielen Ziffern als hinten erfordert werden, um den Bruch zu machen; für alle Zahlen zwischen* 10 *und* 100, 1 *nebst den Ziffern, die zu dem Bruche gehören, u. s. w. Allein für ächte Brüche sind sie negatif, nehmlich* — 1, *nebst den Ziffern, welche hinten zum Bruche gehören, für alle Zahlen zwischen* 1 *und* $\frac{1}{10}$; — 2, *nebst den Ziffern, welche zum Bruche gehoren, für alle Zahlen zwischen* $\frac{1}{10}$ *und* $\frac{1}{100}$ *u. s. w.* S. 2tes Corollarium des 32sten Lehrsatzes.

Die Logarithmen bestehen also aus einer Ziffer, 0 *oder* 1, *oder* 2, *oder* 3, *u. s. w., welche man den*

Charakter oder den Anzeiger *) *nennt, und aus Ziffern hinter dem Charakter, um den nöthigen Bruch auszudrücken. Diese nennt man die Anfüllung (mantissa.)*

Der Charakter ist daher eine ganze positife oder eine ganze negatife Zahl, je nachdem er zu dem Logarithmus einer Zahl gehört, die grösser oder kleiner, als die Einheit, ist: und es giebt so viele Einheiten in der Kennziffer, als sich Ziffern in der Zahl oder in dem Nenner des Decimal-Bruchs, wovon sie der Logarithmus ist, finden, weniger eins. Folglich ist 0 *die Kennziffer aller Zahlen zwischen* 1 *und* 10; 1 *die der Zahlen zwischen* 10 *und* 100; 2 *die der Zahlen zwischen* 100 *und* 1000 *u. s. w.*; — 1 *die aller Decimal-Brüche zwischen* $\frac{1}{10}$ *und* $\frac{1}{100}$; — *die aller Decimal-Brüche zwischen* $\frac{1}{100}$ *und* $\frac{1}{1000}$ *u. s. w.*

Anmerk. In den gewöhnlichen kleinen Logarithmus-Tabellen findet man die Kennziffer immer vor der Mantissa gesetzt, und von derselben mit einem Punkte abgesondert. Allein dies bringt keinen Nutzen, und kann zu vielen Fehlern Gelegenheit geben. Daher wird die Kennziffer in den grösern Tabellen *Douwes*, *Sherwin*, *Gardiner*, *Callet* u. s. f. mit Recht weggelassen. Man findet die Kennziffer unmittelbar mit Hülfe dieses Corollariums.

38*ster Lehrsatz.*

Man berechnet die Logarithmen aller der Zahlen, welche weder die Basis, noch Machten der Basis sind,

*) *Kennziffer.*

sind, indem man die geometrische mittlere Proportional-Zahlen zwischen den Machten der Basis, zwischen welche die gegebene Zahl fällt, und die übereinstimmende arithmetische mittlere Proportional-Logarithmen zwischen den Logarithmen der genannten Machten der Basis beständig findet.

St. S. 406-411. — W. t. 337. *)

Beweis. Aus des 32sten Lehrsatzes 3tem Corollarium.

1ste Anmerk. Wollte man zum Beyspiel den Logarithmus von 5 berechnen; so ist der Logarithmus von 1, —:0, der von 10 ist 1. Die Zahl 5 steht zwischen 1 und 10. Ich betsachte also die Zahlen 1 und 10 als die äussern Glieder einer geometrischen, und die Zahlen 0 und 1 als die äussern Glieder einer arithmetischen Reihe. Ich suche daher auf beyden Seiten die mittlere Proportional-Zahlen, bis ich in der geometrischen Reihe eine Zahl erhalte, welche 5 am nächsten kömmt. Ich gehe auf folgende Art zu Werke:

Mittlere Proportional-Zahl zwischen 1 und $10 = \sqrt{1 \times 10} = \sqrt{10} = 3{,}162277$; mittlere Proportional-Zahl zwischen 0 und 1 ist $\frac{1}{2}$ oder 0,5; folglich ist 0,5 der Logarithmus von 3,162277. Diese Zahl ist zu klein. Ich suche also wieder die mittlere Proportional-Zahl zwischen 10 and 3,162277, welche folglich klei-

*) W. Arithm. Probl. 36. §. 146.

kleiner als 10, jedoch grösser als 3,162277 (8tes Corollarium des 14ten Lehrsatzes) seyn wird. Diese ist $\sqrt{31,62277} = 5,623413$; die mittlere Proportional-Zahl zwischen 1 und 0,5 ist 0,75; folglich ist 0,75 der Logarithmus von 5,623413. Diese Zahl ist zu gross; ich suche daher die mittlere Proportional-Zahl zwischen 5,623413 und 3,162277, welche kleiner als 5,623413, jedoch grösser als 3,162277 seyn wird. Diese ist $\sqrt{5,623413 \times 3,162277} = 4,216966$. Ich suche ebenfalls die mittlere Proportional-Zahl zwischen 0,5 und 0,75. Diese ist 0,612; folglich ist 0,612 der Logarithmus von 4,216966. Da diese Zahl zu klein ist; so nehme ich wieder die mittlere Proportional-Zahl zwischen 4,216966 und 5,623413, und so weiter, bis ich eine Zahl, die sich der 5 sehr nähert, zur mittlern Proportional-Zahl erhalte. Siehe auch die folgende 3te Anmerkung.

2te *Anmerk.* Es erhellet hieraus, wie es komme, dass, da die Logarithmen die Anzeiger von Zahlen sind, welche in einer geometrischen Reihe stehen, die Zahlen, zu welchen die Logarithmen gehören, nichts desto weniger eine arithmetische Reihe bilden, da sie die natürliche Zahlen 1, 2, 3 u. s. w. sind; denn man hat alle die mittlere Glieder, welche zwischen 0 und 1, zwischen 1 und 2 u. s. w. Statt haben, und welche man berechnen musste, um die übrige zu finden, weggelassen. Das Finden eines Logarithmus einer Zahl, zum Beysp. der 5, heisst eigentlich finden, welche Macht

von

von der Basis 10 diese Zahl sey. Folglich findet man in diesem Falle, dass $5 = 10^{0,69897}$ sey; und folglich ist der Anzeiger dieser Macht nehmlich, 0,69897, der Logarithmus von 5.

3te *Anmerk.* Es folgt hieraus, dass die Logarithmen nur so viel, als möglich, durch Annäherung gefunden werden, da alles auf der Wurzel-Ausziehung aus Zahlen beruht, welche alle *unmessbar* sind: und dass folglich die Logarithmen auch genauer seyn werden, je genauer, das heisst, auf wie viel mehrere Ziffern man die Wurzeln berechnet. Die Logarithmen werden übrigens gemeiniglich mit 7 Ziffern in der Mantissa (Anfüllung) angegeben.

4te *Anmerk.* Auf diese Art haben *Briggs* und *Vlacq* die Logarithmus-Tafeln berechnet. So beschwerlich und langweilig dieses Geschäft auch seyn mag; so wird es sehr erleichtert, 1stens dadurch, dass es hinreichend ist, wenn man die Logarithmen der *Primzahlen* 1, 2, 3, 11, 13 berechnet, da man die übrige durch blosse Zusammenfügung der Logarithmen findet, z. B. Log. 21 = Log. 3 + Log. 7; 2tens, dass alle die mittlere Proportional-Zahlen, die man berechnet, um den Logarithmus einer Zahl zu finden, nicht verlohren gehen, sondern in der Folge in den Tabellen wieder benutzt werden können; 3tens, dass man, wenn die Zahlen von einander wenig verschieden sind, die arithmetische mittlere Proportional-Zahlen nehmen kann. Auch hat man späterhin andere Operationen erfunden, die sich auf andere mathe-

thematische Gründe gründen, (die aber an diesem Orte nicht erklärt werden können), um den Logarithmus, von welcher Zahl man wolle, mit weit weniger Mühe zu berechnen.

5te Anmerk. *Neeper*, ein Schottländer, der erste Erfinder der Logarithmen, hat seine Logarithmen nach einer andern Basis, als der von 10, berechnet. Die von ihm angenommene Basis ist die Zahl 2,7182818. Folglich ist 1 der Logarithmus von 2,7182818, da es bey uns als der Logarithmus von 10 angenommen ist. Diese Logarithmen nennt man die *Neepersche*, auch die *natürliche* oder *Hyperbolische* Logarithmen. Jenen Nahmen erhielten sie von ihrem Erfinder, diesen, weil man sie auch in der Lehre von der *Quadratur* der *Hyperbole* aufgefunden hat. Es wird hinlänglich seyn, hier die Anmerkung zu machen, dass der *Neepersche* oder *Hyperbolische* Logarithmus von 10 =: 2,3025850 sey, und folglich (33ster Lehrsatz), dass der *Hyperbolische* Logarithmus irgend einer Zahl sich zu dem Logarithmus derselben Zahl, in den Tabellen, wie 1,0000000 zu 2,3025850 verhalte: dass die Tabellen-Logarithmen hiernach in hyperbolische, wenn man sie mit 2,3025850 multiplicirt, und die hyperbolische in Tabellen-Logarithmen verwandelt werden, wenn man sie mit 2,3025850 dividirt, oder mit $\frac{1}{2,3025850}$, das heisst, mit 0,4342944 multiplicirt.

H, III. §. 209 — 352.

Nach-

Nachricht.

Ich werde in meinen Lektionen selbst die Zuhörer mit dem Gebrauche der Logarithmus-Tabellen bekannt machen, und ihnen angeben, wie derselbe auf den vorhergehenden Lehrsätzen beruhe. Es würde von keinem Nutzen seyn, wenn ich die Regeln ihrer Anwendung an dieser Stelle einschieben wollte, weil sie am Anfange aller Tabellen gefunden werden. Allein es wird nicht unnöthig seyn, bey dieser Gelegenheit die Anmerkung zu machen, daſs es hier fünf Fragen zu beantworten gebe.

1ste; *den Logarithmus einer gegebenen ganzen Zahl, die sich in den Tabellen befinde, zu finden?*

2te; *den Logarithmus eines Decimal-Bruches, er sey ein ächter, oder ein unächter Bruch, der übrigens aus nicht mehr Ziffern bestehe, als es Zahlen in den Tabellen gebe, welcher man sich bediene, zu finden?*

Man sucht den Logarithmus, als ob er eine ganze Zahl wäre, ohne daſs man jedoch auf die *Kennziffer* (wenn sie in den Tabellen steht) seine Aufmerksamkeit richte. Man fügt die Kennziffer nach dem Corollarium des 37sten Lehrsatzes hinzu.

Wir werden in unsern Vorlesungen erklären, wie und warum man zum *Charakter* der Logarithmen von ächten Brüchen anstatt *negatifer* Charaktere 9. für die Zahlen zwischen $\frac{1}{10}$ und 1, und folglich anstatt -1; 8 für die Zahlen zwischen $\frac{1}{100}$ und $\frac{1}{10}$, und

und folglich anstatt -2; 7 für die Zahlen zwischen $\frac{1}{1000}$ und $\frac{1}{100}$, und folglich anstatt -3, und so weiter gebrauchen könne, indem man nehmlich so viele Einheiten von 10 abziehe, als sich Nullen bey dem Nenner des ersten Bruches finden.

3te; *den Logarithmus einer Zahl, sie sey eine ganze Zahl, oder ein Bruch, wenn sie aus mehr Ziffern, als es Zahlen in den Tabellen gebe, bestehe, zu finden?*

Man nimmt die Logarithmen der zunächst vorhergehenden und der zunächstfolgenden Zahlen, nachdem man zu jeder dieser Zahlen so viele Nullen gefügt hat, als es mehr Ziffern in der gegebenen Zahl giebt, und die *Kennziffern* gehörig gesetzt hat. Man nimmt sodann ihren Unterschied. Man nimmt ebenfalls den Unterschied zwischen diesen zwoen Zahlen, und zwischen der kleinsten und der gegebenen. Hierauf sucht man vermittelst der Regel *von dreyen* den proportionellen Theil für den zu findenden Logarithmus, indem man sagt:

Der Unterschied zwischen den zwoen Zahlen verhält sich zum Unterschiede ihrer Logarithmen, wie der Unterschied zwischen der kleinsten und der gegebenen Zahl zum Unterschiede zwischen dem Logarithmus der kleinsten und dem Logarithmus der gegebenen Zahl. Diesen letztern Unterschied fügt man folglich zu dem Logarithmus der kleinsten Zahl hinzu. (36ster Lehrsatz.)

Wir werden auch den Gebrauch der Columnen von *proportionellen Theilen*, welche man in den grösseren

ſseren Logarithmus-Tabellen findet, anweiſen, und die Gründe anzeigen, warum die genannte Regel in Rückſicht auf groſse Zahlen genau, in Rückſicht auf kleine Zahlen aber nicht genau ſey?

4te, *wenn ein Logarithmus gegeben iſt, man ſolle die Zahl finden?*

Wenn der Logarithmus in den Tabellen ſteht; ſo iſt die (übereinſtimmende) correſpondirende Zahl die geſuchte; wo nicht, ſo begnügt man ſich mit der Zahl, deren Logarithmus dem gegebenen Logarithmus am meiſten ſich nähert; oder, will man genau zu Werke gehen, ſo ſucht man den proportionellen Theil vermittelſt der nehmlichen Regel, die bey der vorhergehenden Frage vorgekommen iſt, indem man ſagt: der Unterſchied zwiſchen den zween Logarithmen verhält ſich zu dem Unterſchiede zwiſchen ihren zwo Zahlen, wie der Unterſchied zwiſchen dem kleinſten Logarithmus und dem gegebenen zu dem Unterſchiede zwiſchen der kleinſten und der geſuchten Zahl; oder man bedient ſich anſtatt dieſer Regel in den gröſsern Tabellen der Columne von *proportionellen Theilen*.

5te; *den Logarithmus eines Bruches, er ſey ein ächter, oder ein unächter Bruch, zu finden?*

Man zieht den Logarithmus des Nenners von dem Logarithmus des Zählers ab. Der *Reſt* iſt der verlangte Logarithmus, und die Zahl, welche dieſem Logarithmus gegenüber ſteht, oder zu demſelben gehört, iſt der Decimal-Bruch, der dem gegebenen Bruche gleich iſt.

Siehe St. pp. 213. u. ff. *)

6tens muſs man hier noch beyfügen, daſs man, da die *Addition* immer leichter als die *Subtraktion* von Statten geht, anſtatt die Logarithmen *abzuziehen*, meiſt immer ihre *arithmetiſche Complemente* (35ſten Lehrſatzes 3tes Corollarium) nimmt, und *addirt*. Dieſs kürzt vornehmlich ſehr ab, wenn man verſchiedene Logarithmen abziehen muſs. Man würde z. B. bey der Berechnung dieſes Bruchs: $\frac{23 \times 303 \times 277}{13 \times 24 \times 43}$, nach der gewöhnlichen Weiſe auf folgende Art zu Werke gehen:

Log. 23.	- - - - - - -		1,3617278
Log. 303.	- - - - - - -		2,4814426
Log. 277.	- - - - - - -		2,4424798
			6,2856502
Log. 13.	- - -	1,1139434	
Log. 24.	- - -	1,3802112	
Log. 47.	- - -	1,6720979	
		—	— 4,1662525
			2,1193977;

wovon die am meiſten ſich nähernde Zahl 131,642 iſt. Allein man geht auf folgende Art kürzer zu Werke:

Log.

*) S. beſonders Pr. IX. p. 417. Pr. X. p. 419., da Herr v. Swinden in der letzten Regel ſich zu kurz ausdrückt. Es iſt überhaupt Schade, daſs der H. Verf. ſich nicht über ein paar andere Regeln erklärt hat, damit wir die ganze Lehre der Logarithmen nach ſeiner deutlichen Methode von ihm vorgetragen hätten!

Log. 23.	- - - -	1,3617278
Log. 303.	- - - -	2,4814426
Log. 277.	- - - -	2,4424798
Ar. Compl. des Log. 13	-	8,8860566
— — — — 24	-	8,6197888
— — — — 47	-	8,3279021
		2,1193977

Es ist immer leicht, das arithmetische Complement eines Logarithmus zu nehmen; denn man nimmt nur, (indem man von der linken Hand beginnt) den Unterschied jeder Ziffer des gegebenen Logarithmus von 9, ausgenommen bey der letzten Ziffer, welche man von 10 abzieht.

Viertes Buch.

Ueber die Aehnlichkeit *) der Figuren, und die Verhältnisse ihrer Seiten nnd ihres Inhalts.

1ste Erklärung. Figg. 70. 71.

Man nennt ähnliche Figuren diejenige, worinnen die Winkel unter einander gleich sind, und die Seiten, welche die gleichen Seiten einschließen, und zugleich den gleichen Winkeln gegenüberstehen, in der nehmlichen Verhältniß zu einander stehen.

Eukl. 6. 1ste Def. — W. g. §. 5. und §. 182. **) — St. p. 243. 1ste Erkl.

Bey-

*) Ich bemerke hier, der Merkwürdigkeit der Sache zu lieb, daſs die Holländiſche Sprache das gr. Wort ὁμοιος, gleichförmig überſetzt. In ihr ſagt man: Die Dreyecke ſeyn gleichförmig, wie wir ſagen: ſie ſeyn ähnlich.

**) W. Ar. §. 24. Def. 13.

Beyspiel. In der 70sten Fig. ist $\angle D = \angle A$; $\angle F = \angle C$; $\angle E = \angle B$ und

$$FD : FE = CA : CB;$$
$$FE : DE = CB : BA;$$
$$DE : FD = BA : CA;$$

und eben so in der 71sten Fig. $\angle A = \angle F$; $\angle E = \angle K$; $\angle D = \angle I$; $\angle C = \angle H$; $\angle B = \angle G$; und $BA : AE = GF : FK$; u. s. f.

1ste Anmerkung. In dieser Erklärung ist von zwoen Eigenschaften die Rede, die nicht immer Statt haben, wie man dieses aus den Figuren 4 und 14 erkennen kann. Allein es soll mit dem 2ten Lehrsatze bewiesen werden, dass, was die Dreyecke betrift, die eine derselben mit der andern gepaart geht, und sodann wird aus dem 14ten Lehrsatze die Bedingung erhellen, unter welcher dies in andern Figuren Statt haben könne?

2te Anmerk. Es ist keine leichte Sache, eine genaue, immer befriedigende, und auf alle Fälle gleich anwendbare Erklärung von dieser *Aehnlichkeit* zu geben. Es wird sich aus dem 12ten Lehrsatze des 7ten Buches ergeben, wie diese Erklärung auf den Cirkel angewandt werden könne?

3te Anmerk. Die Aehnlichkeit zwoer Figuren sucht man folglich in der Gleichheit einiger Theile, nemlich in der der Winkel, und in der Verhältnissgleichheit von andern Theilen, nehmlich in der von den Seiten; so dass die Form der beyden Figuren die nehmliche seyn

mufs. Darum ist es nicht genug, dafs die Seiten, die gleiche Winkel einschliessen, proportionell, dafs z. B. in der 70ten Figur AB : AC = DF : DE; und in der 71sten Figur BA : AE = FK : GF seyn; sondern es müssen diejenige Seiten seyn, die überdies auch gleichen Winkeln gegenüberstehen, wie z. B. AB : AC = DE : DF, und BA : AE = GF : FK, weil man alsdenn die Seiten in beyden Figuren in der nehmlichen Ordnung, oder in dem nehmlichen Range nimmt: und dies bringt die Gleichheit von Form und folglich die Aehnlichkeit in beyden Figuren hervor. Aus diesem Grunde werden auch die Seiten, die gleiche Winkel einschliessen, und gleichen Winkeln gegenüberstehen, mit Recht *gleichnahmige* (*ähnlichliegende*, *homologa*) Seiten genannt.

4te *Anmerk.* *Euclid* hat die Worte; „*die zugleich den gleichen Winkeln gegenüberstehen,*“ in seiner Erklärung ausgelassen. Es kömmt mir vor, sie seyen ein wesentlicher Theil derselben.

2te *Erklärung.*

Man sagt von einer Linie, sie sey nach stetiger Verhältnifs geschnitten, wenn sich die ganze Linie zu ihrem größten Theile, wie dieser größte Theil zu ihrem kleinsten verhält.

Euklid 6, 3te Erkl. — S. 244ste S. 3te Erkl.

1ste *Anmerk.* Wir werden bald in des 7ten Lehrsatzes 5tem Corollarium zeigen, dafs in diesem Falle das Rechteck aus der ganzen Linie

und

und dem kleinsten Stücke, dem Quadrate des grösten Stückes gleich sey: und folglich ist in dem 10ten Lehrsatze des 2ten Buchs bereits eines Dreyecks, dessen einer Schenkel nach steti-ger Proportion geschnitten ist, Erwähnung geschehen.

2te Anmerk. Euklid hat in den sechs ersten Lehrsätzen seines dreyzehnten Buches verschiedene Eigenschaften solcher Linien angegeben, wovon diese unter andern in das Auge springt; dass, wenn man zu der gegebenen Linie (L) ein Stück, welches dem grösten Stücke (G) gleich ist, hinzufügt, die neue ganze Linie wieder nach der nehmlichen Proportion geschnitten seyn wird; denn nimm an, dass K das kleinste Stück sey; so ist nach der Voraussetzung:

L : G = G : K; folglich nach 3, 8. No. 1.
L + G : G + K = L : G, oder:
L + G : L = L : G.

Eukl. 13, 5. S. ferner weiter unten die 6te und 7te Anmerkung zu dem 6ten Corollarium des 7ten Lehrsatzes.

1ste Abtheilung.

Ueber die Aehnlichkeit der Dreyecke und Parallelogramme, und die Verhältnisse ihres Inhalts.

1ster Lehrsatz. 64ste und 137ste Figg.

Wenn man innerhalb eines Dreyecks (ADE) *eine Linie* (BC) *mit einer der Seiten* (DE) *parallel zieht;*

so wird diese Linie die beyden übrigen Seiten nach gleichem Verhältnissen schneiden; und umgekehrt: Wenn eine Linie zwo Seiten nach gleichen Verhältnissen schneidet; so wird sie mit der dritten Seite parallel seyn.

Eukl. 6, 2. — *W.* g. §. 184. *) *St.* p. 247. pr. 2.

1ster Beweis. 137ste Fig.

1ster Fall. Wenn die Linien B A und B D ein gemeines Maaſs, nimm die Linie A Z für dasselbe an, haben; so enthält die Linie B A dieses Maaſs zum Beyspiel *m* mal, und die Linie B D dasselbe *n* mal. Man beweiſst mit dem Corollarium des 20sten Lehrsatzes im 1sten Buche, daſs, wenn Z Q || D E; A C die Linie A Q auch *m* mal, und C E die nehmliche Linie A Q, *n* mal enthält; woraus folgt (3ten Buchs 4tes Axioma, und 11ter Lehrsatz), daſs B A : B D = C A : C E ist.

2ter Fall. Wenn die Linien B A und B D kein gemeines Maaſs haben; so nimm an, daſs A Z ein Maaſs voe der Linie A B und *m* mal in ihr enthalten sey. Nun wird A Q auch *m* mal in A C enthalten seyn (nach dem Corollarium des 20sten Lehrsatzes im 1sten Buche), und A Z soll mehr als *n* mal, zum Beyspiel, und weniger als $\overline{n+1}$ mal in B D, so wie auch A Q mehr als *n* mal, und weniger als $\overline{n+1}$ mal in C E enthalten seyn, und folglich, da B A = m x A Z, und A C = m x A Q; und B D > n x A Z und < $\overline{n+1}$. A Z, und C E > n x A Q und < $\overline{n+1}$. A Q; so erhält man (nach 3, 3)

A B : B D = A C : C E.

1ste

*) Theor. 51. §. 268.

1ste Anmerk. Der umgekehrte Fall wird aus der Ungereimtheit, die man begeht, wenn man das Gegentheil annimmt, bewiesen.

2te Anmerk. Dieser Beweis scheint mir aus der wahren Natur der Sache genommen zu seyn, und folglich, *philosophisch gesprochen*, den Vorzug vor andern zu verdienen. *Euklid* hat einen andern Beweis geführt, den er aus dem folgenden 6ten Lehrsatze nahm, daſs die Dreyecke nehmlich, welche die nehmliche Höhe haben, in der Verhältniſs ihrer Grundlinien stehen. Allein der Herr *D'Alembert* hat schon mit Grund bemerkt, daſs dieser Beweiſs nur *indirekt* sey. Da er indessen vielen leichter vorkommen wird; so wollen wir die Gründe, worauf er beruht, angeben, indem wir voraussetzen, daſs unser 6ter Lehrsatz bewiesen sey. Man kann ihn, da er in der That von den fünf vorhergehenden Sätzen unabhängig ist, zuerst nachsehen und beweisen, und, wenn man will, für den *ersten*, und diesen für den *zweyten* in diesem Buche halten.

2ter Beweis. 64ste Fig.

Er ist, wie schon gesagt worden ist, aus *Euklid* genommen, und gründet sich auf den folgenden 6ten Lehrsatz. Nachdem man die Linien BE und CD gezogen, und mit dem 6ten Lehrsatze des 2ten Buchs, die Gleichheit der Dreyecke BCE und DBC bewiesen hat; so zeigt man, vermöge des 6ten Lehrsatzes in diesem Buche, daſs die Dreyecke DBC und BAC sich wie die Grundlinien DB und BA,

eben so auch die Dreyecke BCE und BAC wie die Grundlinien AC und CE verhalten; woraus dieser Lehrsatz (vermöge des 5ten Axioms im 3ten Buche) folgt. Der umgekehrte Fall wird bewiesen, wenn man die Ungereimtheit, die bey der Annahme des Gegentheils eintritt, darthut.

Corollarium.

Die ganzen Seiten sind in der nehmlichen Verhältniß ihrer Theile: namentlich

AD:AB=AE:AC
AD:DB=AE:CE

mit diesem Lehrsatze, und 3, 8.

W. §. 185. *)

3te *Anmerk.* Dieser Lehrsatz stellt uns in Stand, aus dem 1sten Buche der Aufgaben die 8te (1ste Auflösung), 9te, und 10te Aufgabe aufzulösen.

2ter Lehrsatz.

Wenn drey Winkel (A, ABC, ACB,) *eines Dreyecks* (ABC) *dreyen Winkeln* (DCE, CDE, E) *eines andern Dreyecks* (CDE) *der eine einem andern, gleich sind; so stehen die Seiten, welche in beyden Dreyecken gleiche Winkel einschließen, und gleichen Winkeln gegenüberliegen, in einer und derselben Verhältniß.*

Eukl.

*) Folgt zunächst aus W. G. Theor. 51. §. 268. et Arithm. Theor. 13. §. 167.

Eukl. 6, 4. — W. g. §. 183. *) — *Sr.* PP. 249. et 250. Pr. 4.

Construktion. Man nimmt an, daſs die beyden Dreyecke neben einander ſtehen, ſo daſs die beyden Grundlinien A C, C E *eine* Linie mit einander machen. Sodann folgt aus den Bedingungen und der 8ten Erklärung des 1ſten Buches, daſs C D || A B; D E || B C, und folglich, wenn man A B und D E verlängert, bis ſie in F zuſammentreffen, und G D || A C iſt, daſs B C = F D; B F = C D; G D = A C (1 B. 19ter Lehrſatz) ſind.

Beweis. Aus der Conſtruktion, und mit dem 1ſten Lehrſatze. **)

1ſtes Corollarium.

Dreyecke, welche gleiche Winkel haben, ſind ähnlich.

1ſte Anmerk. So bald daher eine der Bedingungen der Aehnlichkeit, namentlich die Gleichheit

*) 3 Cor. Theor. 51. §. 267.

**) In der *Euclidiſchen* Demonſtration iſt zu gröſserer Erleichterung für den Anfänger auch angegeben, daſs: FAE + FEA < 2 R. — Uebrigens ſtöſst man im Beweiſe, wenn man ihn nach H. van Swindens Anweiſung zu führen ſucht, auf einen Lehrſatz, den ich gerne wegen ſeiner Leichtigkeit den Anfänger ſelbſt finden laſſen möchte. *H. v. Swindens* Beweiſs ſcheint nehmlich noch eines Citatums zu bedürfen, das ich aber aus dem angeführten Grunde nicht ergänzen wollte.

heit der Winkel Statt findet; so hat in den Dreyecken die andere, die Verhältniſs-Gleichheit der den gleichen Winkeln gegenüberliegenden Seiten, ebenfalls Statt.

2te Anmerk. Auf diesem und dem 7ten des 51ten Lehrsatzes im 1sten Buche beruht die Anwendung derjenigen Linien auf dem *Proportional-Cirkel*, welche den *Nahmen von gleichen Theilen*, auf den Werkzeugen, die nach französischer Art verfertigt sind (von parties égales) führen, und welche auf denen, die nach englischer Art gemacht sind, mit einem L, dem ersten Buchstaben des Worts *Leagues*, bezeichnet werden. Hierauf gründet sich auch die Anwendung der *Transversal-Linien* auf allen Maaſsstäben, um so viele gleiche aliquote Theile eines Maaſses, als man will, zu nehmen.

2tes Corollarium. 70ste Fig.

Wenn zwey Dreyecke gleiche Winkel haben, und folglich ähnlich sind; so sind die Höhen (BG, EH) *in der nehmlichen Verhältniſs der diesen Winkeln gegenüberliegenden Seiten, und die Grundlinien (welche man, wenn es nöthig ist, verlängert) werden von den Lothlinien* (BG, EH) *die man aus den Spitzen* B *und* E *auf sie zieht, in proportionelle Theile geschnitten.*

St. PP. 450 et 251. Cor.

3te Anmerk. Die Worte: „*welche man, wenn es nöthig ist, verlängert,*" gelten, wenn einer der Winkel auf der Grundlinie

nie stumpf ist; denn alsdann fällt die Lothlinie ausserhalb des Dreyecks (1, 7. 6tes Corollarium.) — Man kann nun das 11te, 15te, 16te, 17te, 21ste und 22ste Problem im 1sten Buche auflösen.

3*tes Corollarium.* (137ste Fig.)

Wenn man auf einer Linie AE *einen Punkt* A *annimmt, und aus zween andern Punkten* (C, E) *zwo Linien* (CB, ED) *gegen eine und dieselbe Seite hin dergestalt zieht, daß sie so wohl parallel mit einander seyn, als auch in der nehmlichen Verhältniss ihrer Entfernungen von dem Punkte* A, (BC : DE = AC : AE) *stehen; so werden ihre Endpunkte* D, B, *mit dem Punkte* A *in einer geraden Linie liegen.*

Beweis. Er wird mit diesem Lehrsatze aus der Ungereimtheit geführt, wenn man das Gegentheil annehmen wollte.

4*te Anmerk.* Dieser Lehrsatz stimmt in der That mit *Euklids* 6, 26. überein; denn es wird eben dasselbe Statt finden, wenn man auf AC, BC, und AE, ED die Parallelogramme, von denen *Euklid* spricht, vollendet.

5*te Anmerk.* Dieses Corollarium oder dieser Lehrsatz, ist in vielen Fällen, auch in der Naturkunde von grossem Nutzen. Man findet ihn auch bey R. Simson Sect. Con. pr. 34.

3*ter*

3*ter Lehrsatz.* 66ste Fig.

Wenn die Seiten (AB, AC, BC) *eines Dreyecks* (ABC) *in der nehmlichen Verhältniß der dreyer Seiten* (DE, DF, EF) *eines andern Dreyecks* (DEF) *stehen; so werden die Winkel, die zwischen den proportionellen Seiten enthalten sind, in beyden Dreyecken gleich seyn.*

Eucl. 6, 5. — *St.* PP. 252. und 251. pr. 5.

Construktion. Man nimmt an, daſs man auf DF ein Dreyeck, DFG, welches mit ABC gleiche Winkel besitzen soll, gestellt habe.

Beweis. Aus dem Gegebenen, der Verhältniſs-Gleichheit der Seiten in den Dreyecken DFG und ABC, und dem 11ten Lehrsatze des 3ten Buchs *) schlieſst man, daſs die Seiten der Dreyecke DGF und EDF unter einander gleich seyn, und folglich erhellet aus dem 12ten Lehrsatze des 1sten Buches, daſs die Winkel auch gleich seyn, woraus dieser Lehrsatz folgt.

Corollarium.

Zwey Dreyecke, deren Seiten proportionell sind, sind ähnlich.

Anwen-

*) Ich möchte lieber sagen: „aus der Verhältniſs-Gleich-„heit der Seiten in den Dreyecken DFG, ABC und „EDF, und dem Grundsatze 1. des dritten Buches folgt, „daſs die Seiten der Dreyecke DGF und EDF unter „einander gleich seyn."

Anwendung. Wenn alſo im Gegentheile die zwote Bedingung für die Aehnlichkeit der Dreyecke, nehmlich die Verhältniſs-Gleichheit der Seiten, Statt findet; ſo hat auch die erſte, nehmlich die Gleichheit der Winkel, Statt.

4ter Lehrſatz.

Wenn ein Winkel (A) *eines Dreyecks* (ABC) *einem Winkel* (EDF) *eines andern Dreyecks* (DEF) *gleich iſt, und die Seiten, welche dieſe Winkel in den beyden Dreyecken einſchlieſſen, proportionell ſind* (AB *und* AC, DE *und* DF); *ſo werden die Dreyecke gleichwinklicht und folglich ähnlich ſeyn.*

Euklid 6, 6. — St. PP. 252. und 253. 6te Pr.

Conſtruktion. Man nimmt an, daſs das Dreyeck DFG mit BAC ähnlich, und namentlich < FDG = < C; < DFG = < A ſeyn.

Beweis. Aus der gegebenen Verhältniſs-Gleichheit, dem 2ten Lehrſatze dieſes Buchs und dem 9ten Lehrſatze des 3ten Buches *) wird die Gleichheit der Linien DE und FG, und ſodann aus dem 8ten Lehrſatze des 1ſten Buchs, die Gleichheit der Winkel EFD und FDG, E und G geſchloſſen; woraus der Lehrſatz ſelbſt folgt.

Der

*) Die vorhergehende Bemerkung kann auch hier benutzt werden. Indeſſen iſt ſichtbar, daſs anſtatt des 11ten Lehrſatzes im 3ten Buche, der im vorhergehenden Beweiſe zugleich für die Gleichheit der Seiten der dortigen Dreyecke DGF und EDF citirt wurde, der 9te dieſes nehmlichen Buchs hätte citirt werden ſollen.

Der letztere Theil des Satzes erhellt auch noch aus dem 1sten Corollarium des 2ten Lehrsatzes.

5ter Lehrsatz. 66ste und 67ste Fig.

Wenn zwey Dreyecke (ABC, DEF) *beyde rechtwinklicht, oder stumpfwinklicht, oder spitzwinklicht sind, und in den beyden letztern Fällen ein Winkel* (C) *des einen dieser Dreyecke einem Winkel* (F) *des andern derselben gleich ist: und wenn ferner die Seiten, die den dritten Winkel einschliessen* (A *und* D *proportionell sind; so werden diese Dreyecke gleichwinklicht, und daher ähnlich seyn.*

Eukl. 6, 7. — *St.* PP. 253 et 254. Pr. 7.

1ster Beweis. No. 1. Für die rechtwinklichte Dreyecke: Man nehme nach der 66sten Fig. an, die Winkel B und E seyn rechte Winkel, die sich also selbst gleich seyn. Darum wird auch nicht, wie in den andern beyden Fällen, noch überdies ein gleicher Winkel erfordert. Es sey AB : AC = DE : DF. Die Construktion ist die vom 4ten Lehrsatze: Mache nehmlich das Dreyeck DGF gleichwinklicht mit ABC. So ist < FDG = < C; < DFG = < A; folglich ist < G ein rechter Winkel; woraus, nehmlich mit dem 2ten Lehrsatze, der Bedingungen und dem 9ten Lehrsatze des 3ten Buches, die Gleichheit von DE und FG folgt *): und dann mit dem 6ten Corol-

*) Der *Herr Verfasser* schien vergessen zu haben, dass Er das Citatum, das nun zunächst folgt, anfangs für Anfänger nicht bestimmt gehabt hatte. No. 1. des 1sten Beweises gielt also nicht den Anfängern, oder sie haben sich ent

Corollarium des 11ten Lehrſatzes im 1ſten Buche, die von EF und DG, und die der ſpitzigen Winkel erhellet.

No. 2. Wenn beyde Winkel E und B entweder ſpitzig oder ſtumpf ſind, und überdies <G = <DFE haben; ſo macht man, wie bey No. 1. <DFG = <A; woraus dann auch die Gleichheit von DE und FG *), hierauf, vermöge des 13ten Lehrſatzes im 1ſten Buche, die von DG und FE, und die der übrigen Winkel erhellet, und daraus weiter der Lehrſatz abgeleitet wird.

1ſte Anmerk. Man hat zu No. 1. nicht einmal das angeführte 6te Corollarium nöthig, wenn die Dreyecke rechtwinklicht ſind; denn nach dem 7ten Lehrſatze im 2ten Buche iſt

□ auf DE + □ auf EF = □ auf DF = □ auf DG + □ auf GF, und da □ auf DE = □ auf FG iſt; ſo iſt das □ auf EF = □ auf DG, oder EF = DG.

2ter Beweis. Aus der Ungereimtheit, wenn man das Gegentheil annimmt, ſ. die 67ſte Figur. Man

entweder überhaupt, oder mit der andern Bedingung zugleich dieſen 5ten Lehrſatz zu erweiſen, oder ſie leſen nun die 1ſte *Anmerkung* zu dieſem Lehrſatze.

*) Der nehmliche Fall tritt mit dem folgenden Citatum ein. Man könnte aber meines Erachtens ſtatt des 13ten Lehrſatzes im 1ſten Buch ſich des 4ten Satzes in dieſem 4ten Buche zu dieſem Beweiſe ſehr wohl bedienen.

Man nimmt CG = EF, und CH = DF. Es ſey AB: BC = DE : EF, und die Winkel C und F ſeyn entweder rechte Winkel, oder wenn ſie keine rechte Winkel ſind, ſo ſeyn ſie gleich, und überdies ſeyn die beyden Winkel B und E ſtumpf oder ſpitzig. Wenn alsdann der < HGC oder der < DEF nicht = < ABC; ſo ſey es der < CGI. So folgt aus dem Gegebenen, und dem 1ſten Lehrſatze, daſs IG = HG ſeyn würde.

2te Anmerk. Es iſt ganz ſichtbar, warum die beyden Winkel (z. B. E und B) entweder ſtumpf, oder recht, oder ſpitzig ſeyn müſſen; denn da man (1, 14. 1ſtes Cor.) von dem Punkte A zwo gleiche Linien ziehen kann, die daher zu AC die nehmliche Verhältniſs, namentlich die von DE : DF, haben, von welchen aber die eine mit BC einen ſtumpfen, die andere einen ſpitzigen Winkel machen würden *), indeſſen die Winkel C und F dieſelben blieben; ſo folgt, daſs die Art der Winkel B und E beſtimmt ſeyn müſſe.

3te Anmerk. Was ich in der 2ten Anmerkung zu dem 14ten Lehrſatze im 1ſten Buche in Rückſicht auf den 13ten Lehrſatz eben dieſes Buches geſagt habe, findet auch hier Statt. Es drücken nehmlich einige Schriftſteller dieſen Lehrſatz alſo aus: Dreyecke, die einen Winkel

*) Hier muſs man, nehmlich der Deutlichkeit wegen, noch die Worte: „wenn man das Gegentheil annähme,“ ſuppliren.

kel gleich und zwo Seiten haben, welche einen andern Winkel einschliessen und proportionell sind, von welchen aber diejenige, die dem gleichen Winkel gegenüberliegt, grösser als diejenige ist, an welche sie gränzt, sind ähnlich.

Und hieraus folgt auch noch, dass rechtwinklichte Dreyecke, oder stumpfwinklichte Dreyecke, in welchen die stumpfen Winkel gleich sind, wenn die Seiten, die einen andern Winkel einschliessen, proportionell sind, ähnlich seyn. Dies ist ein unmittelbares und besonderes Corollarium unseres allgemeinen Lehrsatzes. — *Karsten* §. 208.

6ter Lehrsatz. 63ste Fig.

Dreyecke (ABC, ACD), *welche eine und dieselbe Höhe haben, auf verschiedenen Grundlinien* (BC, CD) *aber stehen, verhalten sich wie diese Grundlinien zu einander; und umgekehrt. Eben dies gilt auch für die Parallelogramme.*

Eukl. 6, 1. — *St.* P. 246. 1stes Coroll. von Pr. 1.

Construktion. Man verlängert die Grundlinien BC, und CD, und nimmt auf ihnen so viele Theile BE, EF, FG, die der BC gleich seyn, als man Theile DH, HI, IK nimmt; die der CD gleich seyn. Man zieht die Linien AE, AF, AG, AH, AI, AK.

Beweis. Mit 2, 6. 3, 3. Was den zweyten Theil betrift, mit dem 1sten Corollarium des 19ten Lehrsatzes im 1sten Buche.

Der umgekehrte Fall wird aus der Ungereimtheit erwiesen, wenn man das Gegentheil annehmen wollte.

1ste Anmerk. Viele Schriftsteller beweisen diesen Lehrsatz auf diese Art: daſs sie die eine Grundlinie in *m* Theile zum Beyspiel, und die andere in *n* Theile von der nehmlichen Gröſse schneiden. Alsdann wird das eine Dreyeck *m* und das andere *n* gleiche Dreyecke enthalten, und die Dreyecke werden sich daher wie *m* zu *n*, das heiſst, wie die Grundlinien, zu einander verhalten. Allein es springt in die Augen, daſs man alsdann stillschweigend annimmt, die Grundlinien haben ein gemeines Maaſs; welches nicht immer wahr ist. Deswegen thut dieser Beweis keine volle Genüge.

2te Anmerk. Man kann nunmehr die 20ste Aufgabe des 3ten Buches auflösen.

7ter Lehrsatz. 68ste Fig.

Parallelogramme (AD, GK) *oder Dreyecke, welche auf verschiedenen Grundlinien* (CD, LK) *stehen, und verschiedene Höhen* (DE, KH) *haben, sind in zusammengesetzter Verhältniß, ihrer Grundlinien und Höhen* (*wie* CD x DE : LK x KH) *zu einander.*

St. P. 245. Pr. 1.

Construktion. Man nimmt an, die Rechtecke FD und MK haben die nehmliche Grundlinie und Höhe der gegebenen Parallelogramme und Dreyecke,

und

und das Rechteck MK, wie das Rechteck FD seyn auf eine und dieselbe Linie dergestalt gelegt, dass beyde einen ihrer Winkel gemein haben. Man verlängere HK bis N.

Beweis. Mit dem 6ten Lehrsatze dieses und dem 10ten Lehrsatze des 3ten Buchs schliesst man, die Verhältniss der Rechtecke FD und MK sey die zusammengesetzte von CD x DE und CK x HK; woraus die der gegebenen Parallelogramme oder Dreyecke, vermöge des 1sten Corollariums von dem 1sten, oder des 1sten Corollariums von dem 6ten Lehrsatze im 2ten Buche erhellet.

1ste Anmerk. Hier ist wieder ein allgemeiner Lehrsatz, den man nicht beweisen kann, man habe dann zuvor einen besondern Fall desselben bewiesen; denn der vorhergehende Lehrsatz ist ein besonderer Fall von diesem.

1stes Corollarium.

Wenn Parallelogramme oder Dreyecke auf gleichen Grundlinien stehen; so haben sie die nehmliche Verhältniß ihre Höhen zu einander.

Tacquet bey *Eucl.* 6, 1. Corollarium. — *St.* P. 246. 2tes Cor. von Pr. 1.

Hierauf gründet sich die Auflösung der 22sten Aufgabe im 3ten Buche der Probleme.

2tes Corollarium.

Gleichwinklichte Parallelogramme oder Dreyecke, stehen in zusammengesetzter Verhältniſs der Seiten, die gleiche Winkel einschliessen, und gleichen Winkeln gegenüberliegen. Dies erhellet daraus, daß die Dreyecke EBD *und* HIK *ähnlich sind; und folglich die Verhältniß von* ED *und* HK *die der Seiten von* BD *und* IK *ist.*

2te Anmerk. Dies ist der 23ste Satz des 6ten Buchs von *Euklid.* Dieser Schriftsteller, bey welchem man unsern Lehrsatz nicht findet, beweisst den in diesem 2ten Corollarium enthaltenen sehr richtig: da nehmlich (Fig. 32) die ▭ AG und GD gleichwinklicht sind, so nimmt Er an, daſs sie mit ihren gleichen Winkeln gegen einander anliegen. Alsdann werden FG und GI *eine* gerade Linie, und HG und GE *eine* gerade Linie (2ten Lehrs. 3tes Corollarium) machen. Wenn man hierauf ID und AH verlängert; so bekömmt man ▭ HI; womit man, vermöge des vorhergehenden Lehrsatzes, die beyden Parallelogramme vergleicht, und den Schluſs zieht.

St. P. 267. Pr. 19.

3tes Corollarium.

Wenn zwey Parallelogramme oder zwey Dreyecke gleich sind; so stehen ihre Grundlinien in umgekehrten Verhältnissen ihrer Höhen: und umgekehrt. (9ter und 6ter Lehrsatz des 3ten Buchs.)

Tacquet bey *Euclid.* 6. 15. Cor. — *St.* P. 246. 3tes Corollarium von der 1sten Pr.

3*te Anmerk.* Man ist nun im Stande, die Auflösung der 21sten Aufgabe des 3ten Buchs zu verrichten.

4*tes Corollarium.*

Wenn zwey Parallelogramme oder zwey Dreyecke gleich sind, und überdies einen gleichen Winkel einschließen; so stehen die Seiten, welche diesen Winkel in dem einen von ihnen einschließen, in umgekehrter Verhältniß zu denen, welche den gleichen Winkel in dem andern derselben einschließen; und umgekehrt.

Es ergiebt sich daraus, daſs alsdann ED und HK die nehmliche Verhältniſs von BD : IK haben.

St. P. 259. Pr. 12. P. 260. Pr. 13.

Dies ist die 14te und 15te Proposition des 6ten Buchs in den Elementen von *Euklid.* Dieser Schriftsteller beweiſst sie auf die Art, welche ich in der 2ten Anmerkung angegeben habe.

4*te Anmerk.* Der Leser ist nun im Stande, die 2te Auflösung der 13ten und 14ten Aufgabe des 3ten Buchs zu bewerkstelligen.

5*tes Corollarium.*

In allen Rechtecken, die einander gleich sind, sind die Grundlinien in umgekehrter Verhältniß zu ihren Höhen; und umgekehrt: das heißt, wenn vier Linien

proportionell ſind; ſo wird das Rechteck aus den zwo äußern dem Rechteck aus den zwo mittlern; und wenn die zwo mittlern gleich ſind, und daher die vierte in der That mit den zwoen erſtern proportionell iſt, oder, wenn drey Linien ſtetig proportionell ſind; das Quadrat auf der mittlern dem Rechteck aus den äußern gleich ſeyn.

5te Anmerk. Dies iſt der 16te und 17te Satz *Euklids* in ſeinem 6ten Buche, die Er beyde auf die bereits mitgetheilte Art beweiſst. Ich werde bald, nehmlich im 8ten Corollarium No. 2. dieſes Lehrſatzes anzeigen, daſs dieſer Lehrſatz ganz mit dem 5ten des 3ten Buchs, und mit ſeinem 1ſten Corollarium übereinkömmt, und man müſste ſich wundern, daſs man dieſen wichtigen Lehrſatz in dem 5ten Buche Euklids nicht antrift, wenn er nicht mit dem eben genannten 16ten und 17ten Satze des 6ten Buches übereinkäme, und dieſer Autor die Verhältniſs-Gleichheit nicht beſtimmter in Beziehung auf die Meſskunde betrachtet hätte.

6tes Corollarium.

Aus dem vorhergehenden Corollarium erhellet, daß es ſo viel iſt, eine Linie nach ſtetiger Proportion zu ſchneiden, als ſie dergeſtalt zu ſchneiden, daß das Quadrat des größten Stücks dem Rechtecke aus der ganzen Linie und dem kleinſten Stück gleich iſt: ein Ausdruck, deſſen ich mich bereits in dem 4ten Corollarium des 10ten Lehrſatzes im 2ten Buche bedient habe, indeſſen dieſe Theilung ſelbſt der Gegenſtand der 12ten Aufgabe im 1ſten Buch der Aufgaben iſt.

6te

6te Anmerk. Hieraus folgt, daſs die beyden Stücke zum Ganzen unmeſsbar ſind; denn es ſey (155ſte Fig.) eine Linie BD in H nach ſtetiger Proportion geſchnitten, und $BI = \frac{1}{2} BD$; ſo iſt nach dem vorhergehenden Corollarium:

□ auf BH = Recht. aus BD, DH:

das heiſst:

□ auf BD — DH = Recht. aus BD, DH: oder 2, 2. 2tes Cor.

□ auf BD — 2 Recht. aus BD, DH + □ DH = Recht. aus BD, DH.

und folglich

□ auf BD — 2 Recht. aus BD, DH + □ auf DH + 5 □ auf DI = Recht. aus BD, DH + 5 □ auf DI,

oder

□ auf BD — 3 Recht. aus BD, DH + □ auf DH + 5 □ DI = 5 □ DI;

oder (2, 1. 1ſtes Corollarium)

9 □ auf DI — 6 Recht. aus BI, DH + □ auf DH = 5 □ auf DI;

oder (2, 2. 2tes Coroll.)

□ auf (3 DI — DH) = 5 □ auf DI;

und folglich

3 DI — DH = der Linie, wovon das □ = 5 □ auf DI,

oder $= DI \sqrt{5}$;

und folglich

$DH = 3 DI - DI \sqrt{5} = \frac{3}{2} BD - \frac{BD}{2} \sqrt{5} = \frac{BD}{2} (3 - \sqrt{5})$.

Da aber $\sqrt{5}$ unmeſsbar iſt; ſo iſt auch DH unmeſsbar. Dies iſt der 6te Satz in *Euklids* 13tem Buche.

7te Anmerk. Hieraus folgt wieder, da $DH = BD - BH$, daſs $3\,DI - DH = \frac{3}{2}BD - BD + BH = \frac{1}{2}BD + BH$;

und folglich, daſs $\square\,(\frac{1}{2}BD + BH) = 5\,\square$ auf $\frac{1}{2}BD$, und $BH + \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}BD\sqrt{5}$.

Dies iſt *Euclid's* 13, 1.

8te Anmerk. Und wie $DH = \frac{BD}{2}(3 - \sqrt{5})$ iſt; ſo iſt eine andere Linie $CK = \frac{CE}{2}(3 - \sqrt{5})$; und folglich $DH : CK = \frac{BD}{2}(3 - \sqrt{5}) : \frac{CE}{2}(3 - \sqrt{5})$.

oder (4tes Axiom 3ten Buchs) $= BD : CE$;

und ebenfalls $BH : EK = BD : CE$;

das heiſst: „Wenn eine Linie nach ſtetiger „Proportion geſchnitten wird; ſo iſt immer die „Verhältniſs der ganzen Linie zu jedem ihrer „Theile eine beſtändige Verhältniſs und die „nehmliche für alle Linien, die auf dieſe Art „geſchnitten werden.„

Euklid. 14, 7. oder nach Andern 14, 2.

7tes Corollarium. 68ſte Fig.

Wenn die Grundlinie CD *die Grundlinie* LK, m *mal, und wenn die Höhe* DE *die Höhe* KH, n *mal enthält; ſo iſt* $\square GK : \square AD = 1 : m \times n$: *und folg-*

folglich (3, 9) *wenn man* ▭ GK, *oder das Rechteck* MK *als die Einheit, oder als das gemeine Maafs annimmt; so ist die Zahl, die den Inhalt des Parallelogramms* AD *angiebt, dem* m.n *gleich: das heißt, das Parallelogramm* AD *wird so viele Parallelogramme, die* GK *gleich seyn werden, oder so viele Rechtecke, die* MK *gleich seyn werden, enthalten, als es Einheiten in der Zahl* m×n *giebt.*

Man nimmt das Rechteck MK *von der Art an, daß Höhe und Grundlinie gleich seyn, oder daß es ein Quadrat sey, dessen Seite* LK *diejenige Einheit, deren man sich zur Bestimmung der Länge der Seiten* CD, DB, DE *bedient: zum Beysp. ein Zoll, ein Fuß, eine Ruthe, u. s. w. ist. Man nennt dieses Rechteck* MK *die Quadrat-Einheit, um es von der Längen-Einheit, deren man sich zur Messung von Entfernungen oder Längen bedient, zu unterscheiden. Wenn daher* ▭ CB 10 *Fuße enthält; so zeigt dies* 10 *Quadrat-Fusse, oder* 10 *Quadrate an, deren jede Seite einen Fuß lang ist.*

Hieraus folgt: daß einzelne und quadratische Einheiten von verschiedener Benennung sich, wie die Anzahl der Theile, die in der einzelnen Einheit enthalten sind, zu dem Quadrat dieser Anzahl, verhalten. Ein Fuß enthält also 12 *Zolle, und ein Quadrat-Fuss* 12 *mal* 12 *oder* 144 *Quadrat-Zolle. Dies hat auch Euclid in dem* 11*ten Satze des* 8*ten Buchs bewiesen.*

9*te Anmerk.* Man sieht hieraus, wie man ein Produkt von zwoen Zahlen eine *Flächen-Zahl*, deren Wurzeln die *Seiten* seyn, mit *Euklid* (7. 16.)

16.) heissen und behaupten könne, dass *Flächen-Zahlen* in zusammengesetzter Verhältniss ihrer Wurzeln stehen (8. 5.); und dass *ähnliche Flächen-Zahlen* diejenige wären, deren Wurzeln proportionirt seyn (7, 21).

Aus diesem Grunde sagten auch die Alten *Flächen-Oerter* (*locos planos*), und nannten *Flächen-Aufgaben* (*problemata plana*) alle Aufgaben, worin man sich nicht mehr als zwoer Grossen, oder der *Flächen-Zahlen* allein bedient. *)

8tes *Corollarium.*

Aus dem vorhergehenden Lehrsatze erhellet, wie und in welchem Sinne man sagen könne:

1. *daß das Rechteck von zwoen Linien durch ihre Vervielfältigung ausgedrückt oder angegeben werde: und folglich, wie eine Verhältniß, welche aus zwoen zusammengesetzt sey, durch das Rechteck der Linien, welche die einzelne Verhältnisse ausdrücken, und eine verdoppelte (zweyfach höhere) Verhältniß durch das Quadrat einer Linie angewiesen werde, und damit übereinkomme.*

2. *Daß wenn vier Linien verhältniß-gleich seyn, das Rechteck der äußern derselben dem Rechtecke der mittlern gleich sey, (dies ist auch im 5ten Corollarium aus*

*) *Diese Erklärung von Flächen-Oertern wird genauer und bestimmter entwickelt Anm. 9. des 12ten Lehrs. im 5ten Buche.* *Der Verfasser.*

aus andern Gründen bewiesen worden); und wie dieses mit dem 5ten Lehrsatze des 3ten Buches übereinkomme?

3. *Daß, wenn drey Linien verhältniß gleich seyn, das Quadrat auf der mittlern dem Rechtecke der äussern (was bereits im 5ten Corollarium aus andern Gründen bewiesen worden ist) gleich sey: und wie dieses mit dem 1sten Corollarium des 5ten Lehrsatzes im 3ten Buche übereinkomme?*

4. *Daß der Inhalt eines Parallelogramms durch das Produkt seiner Grundlinie, multiplicirt mit der Höhe, ausgedrückt werden könne: und daß dies mit dem 1sten Corollarium des 1sten Lehrsatzes im 2ten Buche übereinkomme.*

Daß der Inhalt eines Quadrats ebenfalls durch die zwote Macht oder das Quadrat seiner Seite ausgedrückt werden könne.

Deswegen bedienen sich auch die Alten der Ausdrücke: *die Macht einer Linie, eine Linie hat so viel Macht, eine Linie kann so viel,*" um das Quadrate das man auf einer solchen Linie machen kann, anzuzeigen. So drückte also *Euklid*, zum Beyspiel, den Lehrsatz, den ich in der 7ten Anmerkung zu diesem unserem Lehrsatze bewiesen habe, auf folgende Art aus: „Wenn eine Linie nach stetiger Ver„hältniss geschnitten wird: so *kann* ihr grösstes Stück „zusammen mit ihrer Hälfte das Fünffache des Qua-

„drats

„drats der halben Linie.“ *) Wenn nun die Anzahl Einheiten, wodurch der Inhalt eines Quadrats ausgedrückt wird, keine *Quadrat-Zahl* ist; so ist die Seite des Quadrats in Beziehung auf die Einheit, welche die Länge mißt, *unmeßbar*: und dies ist also der Fall mit der Diagonale eines Quadrats in Beziehung auf seine Seite. Dies hat auch *Euklid* in dem letzten Satze seines 10ten Buchs bewiesen.

5. *Man sieht hieraus, daß der Inhalt eines Dreyecks durch das Produkt seiner Grundlinie multiplicirt mit seiner halben Höhe: oder durch das dieser seiner Höhe, multiplicirt mit seiner halben Grundlinie: mit einem Wort, durch das halbe Produkt seiner Grundlinie und Höhe ausgedrückt werden kann, und daß dies mit dem 1sten Corollarium des 6ten Lehrsatzes im 2ten Buche übereinkömmt.*

6. *Daß der Inhalt eines regulären (ordentlichen, regelmäßigen) Vielecks durch das halbe Produkt des Umkreises multiplicirt mit der Lothlinie, ausgedrückt wird: und daß dies mit dem 17ten Lehrsatze des 2ten Buches übereinkömmt.*

7. *Daß der Inhalt eines rechtwinklichten Trapeziums durch das Produkt der Grundlinie multiplicirt mit der Hälfte der Summe der Seiten um die rech-*

*) Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ· τὸ μεῖζον τμῆμα προσλαβὸν τὴν ἡμίσειαν τῆς ὅλης πενταπλάσιον δύναται, τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς ὅλης.

rechten Winkel *); *oder, was auf das Nehmliche hinausläuft*, (3. 19. Corollarium) *mit der arithmetisch-mittlern Proportional-Grösse zwischen den Seiten um die rechten Winkel, ausgedrückt wird; und wie dies mit dem 19ten Lehrsatze des 2ten Buchs übereinkommt?*

8. *Endlich, daß die Aufgabe: ein Rechteck auf einer gegebenen Linie zu beschreiben, das heißt, ein Rechteck auf einer gegebenen Linie zu machen, das einem gegebenen Rechtecke oder Quadrate gleich sey, mit dieser Aufgabe übereinkömmt: „den Quotienten „zu finden, den man erhält, wenn man das Produkt zwoer Zahlen mit einer gegebenen Zahl dividirt." Das was man verlangt hat, kömmt ja auf das hinaus: daß man eine Linie finden solle, die mit einer gegebenen Linie ein Rechteck mache, welches einem gegebenen Rechtecke gleich sey. Dies giebt das 15te Problem im 3ten Buche.*

10te *Anmerk.* Alle vorhergehende Ausdrücke sind genau und bestimmt, wenn man sich ihrer in dem Sinne, den sie haben, bedient. Allein an und für sich betrachtet, sind sie nicht geometrisch, und man giebt nicht nur unbestimmte, sondern selbst ganz falsche Begriffe, wenn man sie, wie viele Schriftsteller thun, Anfangs gebraucht. Die Alten bedienen sich niemalen solcher unbestimmten Begriffe, wie z. B. der Inhalt eines Rechtecks *sey* dem Produkte der Grund-

*) Vergl. *Steenstra's* 38sten Satz in seinen 2sten Buche, P. 69.

Grundlinie mit der Höhe *gleich*. Auch habe ich mich überall, wie es sich fügt, der Worte: „*wird ausgedrückt durch*", oder „*kömmt überein mit*" etc. anstatt des unbestimmten und falschen: „*ist gleich dem*" bedient. Man kann keine Linien, sondern nur Zahlen im eigentlichen Sinne mit einander multipliciren, oder dividiren und folglich auch nur diejenige Zahlen mit einander multipliciren, welche die Länge zwoer Linien, *in Beziehung auf ein gemeinschaftliches Maaß*, ausdrücken. Die Multiplication zwoer Linien macht niemals ein Rechteck oder ein Quadrat; sondern die Anzahl von *quadratischen Einheiten*, das heisst, von gleichen Quadraten, deren Seiten man als *respektive Einheiten*, oder als ein gemeinschaftliches Maass der Länge gebraucht; diese Anzahl, welche den Inhalt eines gegebenen Rechtecks angiebt, ist dem Produkte der Seiten dieses Rechtecks, das heisst, dem Produkt der Zahlen gleich, welche die Länge dieser Zahlen in Beziehung auf die genannte Einheit oder das gemeinschaftliche Maass ausdrücken. Möchte indessen Jemand der erwähnten Ausdrücke sich bedienen, nachdem Er ihren Sinn bestimmt angegeben hat, der thue es, nur immer in der Erinnerung, dass sie abgekürzte Redensarten oder abgekürzte Bezeichnungen sind.

Siehe hierüber *D'Alembert* Melanges, Tome V. p. 211. seqq. — *Tacquet* Scholion zu dem 34sten und 44sten Satze des 1sten, und dem 22sten Satze des 6ten Buchs von *Euclid*. — *Clavius* an den nähmlichen Stellen. — *Hennert* G. §§. 303 – 328.

9tes

9tes *Corollarium.*

Wenn man den Inhalt zweyer Parallelogramme oder Dreyecke durch I *und* i, *die Grundlinien durch* B *und* b, *die Höhen durch* H *und* h, *ausdrückt; so ist dieser 7te Lehrsatz*

$$I : i = B \times H : b \times h;$$ *und folglich*

1. Wenn die Grundlinie in Rücksicht auf die Grundlinie, oder die Höhe in Rücksicht auf die Höhe unmeſsbar ist; jedoch, wenn es nicht beyde zugleich sind; so wird (3, 11te Erkl. 11tes Cor.) auch ihr Inhalt *I* und *i* wechselseitig unmeſsbar seyn, das heiſst, sie werden zu ihrem gemeinschaftlichen Maaſs keinen Raum haben können.

2. Wenn so wohl Höhe als Grundlinie von beyden Parallelogrammen wechselseitig unmeſsbar sind; so kann die Verhältniſs ihres Inhalts ($I : i$) meſsbar seyn (3, 11te Erkl.)

Dies ist, zum Beyspiel, der Fall, wenn man auf der Diagonale und der Seite eines Quadrats Quadrate beschreibt.

3. Wenn man Quadrate auf Linien beschreibt, die wechselseitig unmeſsbar sind; so wird ihr Inhalt, das heiſst, so werden diese Quadrate selbst, nicht wie eine Quadrat-Zahl zu einer Quadrat-Zahl, das heiſst, nicht wie zwo Zahlen, aus denen man Wurzeln ziehen kann, zu einander sich verhalten.

4. Quadrate können wechselseitig unmeſsbar seyn; denn (nach der 75sten Fig.) sey AF in Rück-

ſicht auf FD unmeſsbar, z. B. wie $\sqrt{15}:2$. Man nehme eine mittlere Proportional-Zahl zwiſchen beyden. Es ſey $\overline{FB}^2 = 2\sqrt{15} = \sqrt{60}$, und folglich, das □ auf FB : □ FD $= \sqrt{60} : 4 = \sqrt{15} : 2$, und □ auf FB : □ auf AF $= \sqrt{60} : 15$.

Folglich giebt es *unmeßbare* Quadrate; es giebt Linien, welche unmeſsbar ſind, deren Quadrate aber meſsbar werden, und es giebt andere, die wechſelſeitig unmeſsbar ſind, und deren Quadrate es auch ſind. *Euklid* heiſst jene Linien *unmeßbar in Länge*, dieſe *unmeßbar* in Länge und Macht (Quadrat.) Hieraus folgt der 9te Lehrſatz ſeines 10ten Buchs, der alſo lautet: *) „die Quadrate, welche man auf „Linien errichtet, die *in Längen meßbar* ſind, ver„halten ſich zu einander, wie ſich eine *Quadrat*-„*Zahl* zu einer andern *Quadrat-Zahl* verhält, und „umgekehrt, die Quadrate, welche man auf Linien „errichtet, die in *Länge unmeßbar* ſind, verhalten „ſich

*) Τὰ ἀπὸ τῶν μήκει συμμέτρων εὐθειῶν τετράγωνα, πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. Καὶ τὰ τετράγωνα τὰ πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχοντα, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, καὶ τὰς πλευρὰς ἕξει μήκει συμμέτρους. τὰ δὲ ἀπὸ τῶν μήκει ἀσυμμέτρων εὐθειῶν τετράγωνα πρὸς ἄλληλα λόγον οὐκ ἔχει, ὅνπερ τετράγωνος ἀριθμος πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. Καὶ τὰ τετράγωνα, τὰ πρὸς ἄλληλα λόγον μὴ ἔχοντα, ὅνπερ τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, οὐδὲ τάς πλευρὰς ἕξει μήκει συμμέτρους.

„sich nicht zu einander, wie sich eine *Quadrat-Zahl* „zu einer andern *Quadrat-Zahl* verhält, und umge„kehrt." — „Und (dies ist das Corollarium) Li„nien, die in Länge messbar sind, sind es auch in „Macht: diejenigen, welche in Macht messbar sind, „sind es nicht immer in Länge: diejenigen, welche „in Länge unmessbar sind, sind es nicht immer in „Macht; doch diejenigen, welche in Macht unmess„bar sind, sind auch immer in Länge unmessbar. *)

10tes *Corollarium*.

Aus den vorhergehenden, besonders dem 5ten und 8ten Corollarium erhellet weiter, daß man alle Verhältnisse, so zusammengesetzt sie auch seyn mögen, immer durch ein Verhältniß von zwo geraden Linien ausdrücken könne.

Denn es sey M : N = A x B x C : D x E x F. *Die einzelnen Verhältnisse zwischen* A *und* D, B *und* E, C *und* F *kann man immer durch gerade Linien ausdrücken, diese mögen meßbar, oder unmeßbar seyn.*

Ich nehme an, P *sey die mittlere Proportional-Größe zwischen* A *und* B, Q *sey es zwischen* D *und* E, *und* R *sey die dritte Proportional-Größe zwischen* P *und* Q; *so ist*

□ *auf* P = *Recht. aus* A *und* B;
□ *auf* Q = *Recht. aus* D *und* E;

 folg-

*) S. Hr. Lorenzens Ausgabe von Euklids Elementen, (Halle 1787.) wo dieses Corollarium erläutert ist.

folglich □ *auf* P : □ *auf* Q = A x B : D x E; *allein* P : Q = Q : R; *folglich* (8ten Cor. No. 8. u. 3, 14)

□ auf P : □ auf Q = P : R : *folglich*

P : R = A x B : D x E, *und*

M : N = P x C : R x F.

Nimm an, S *sey die mittlere Proportional-Größe zwischen* P *und* C; T *sey sie zwischen* R *und* F; *und* U *sey die dritte Proportional-Größe zwischen* S *und* T; *so ist folglich*

□ *auf* S : □ *auf* T = P x C : R x F; *allein es ist* □ auf S : □ *auf* T = S : U; *folglich* M : N = S : U; *und auf die nehmliche Art für alle mögliche Fälle.*

8*ter Lehrsatz.* 70ste Fig.

In ähnlichen Dreyecken (ABC, DEF) *sind die Rechtecke der gleich liegenden (homologen) Seiten* (AC, BC, DF, EF) *jedoch zurückkehrend genommen (namentlich von* AC *und* EF, BC *und* DF) *einander gleich.*

Beweis. Aus dem 2ten Lehrsatze, und dem 5ten Corollarium des 7ten Lehrsatzes.

Anmerk. Dieser Satz wird im 1sten Corollarium des 12ten Lehrsatzes vom 5ten Buche auf eine andere Art bewiesen werden. *)

9*ter*

*) Diese Anmerkung gehört vielmehr zum 4. 7. 4ten Corollarium.

9ter Lehrsatz. 69ste Fig.

Wenn eine Linie (BD) *einen Winkel* (CBA) *eines Dreyecks* (BCA) *in zween gleiche Theile theilt, und bis zu der gegenüberstehenden Seite,* (*oder der Grundlinie* CA) *verlängert wird; so werden die Stücke* (AD, CD) *dieser gegenüberstehenden Seite* (*oder Grundlinie*) *in der nehmlichen Verhältniss stehen, worin sich die anliegenden Seiten* (AB, BC) *des Dreyecks befinden: und das Quadrat eben dieser Linie* (BD) *nebst dem Rechtecke aus den genannten Stücken* (AD, CD) *der Grundlinie ist dem Rechtecke aus den zwo übrigen Seiten* (BA, BC) *gleich.*

Was den 1sten Theil betrift; so verlängere AB, und es sey CE || BD.

Beweis. Man beweisst zuerst aus der Natur der parallelen Linien, und mit dem 4ten Lehrsatze des 1sten Buchs, dass < ECB = < CEB, und folglich (1, 11.) EB = CB sey; woraus sich der Beweis nach dem 1sten Lehrsatze dieses Buchs sich ergiebt.

Was den zweyten Theil betrift; so mache < DAF = < ABF: verlängere BD bis F, und ziehe CF.

Beweis. Man zeigt aus dem Gegebenen, und der Construktion, dass △ ABF ∾ △ DAF, weil < DAF = < ABF = < CBD: und folglich ist in den △△ CDB und FDA auch < BCD = < AFD, oder = < AFB in dem △ ABF; und folglich in den △△ BFA und CBD auch ebenfalls < BAF = < CDB.

Woraus vermöge des 8ten Lehrsatzes von diesem Buche und des 3ten Corollariums vom 1sten Lehrsatze im 2ten Buche, und abermal vermöge des 8ten Lehrsatzes in diesem Buche der Satz bewiesen wird. *)

1ste Anmerk. Dieser zweyte Theil des Lehrsatzes wird in dem 7ten Corollarium des 12ten Lehrsatzes im 5ten Buche auf eine andere Art bewiesen.

2te und wichtige Anmerk. Figg. 150. 151. Der erste Theil dieses Lehrsatzes ist der dritte Satz des 6ten Buchs in *Euklids* Elementen. Allein das Nehmliche gilt auch in Rücksicht auf den äussern Winkel CBO. In diesem Falle fällt die Linie BD, welche den genannten Winkel CBO in zween gleiche Theile (OBD und DBC) theilt, ausserhalb der Grundlinie CA, zwar nicht immer auf der nehmlichen Seite: denn wenn $< OBC = 2 < BCA$, und wenn folglich

*) Diesen Beweis möchte ich lieber um mehrerer Deutlichkeit willen also anzeigen: „Woraus vermöge des 8ten „Lehrsatzes in diesem Buche, den man einmal auf die „ähnlichen Dreyecke CDB, FAD, und ein zweitesmal „auf die ähnlichen $\Delta\Delta$ CDB, FBA anwendet, und vermittelst des 3ten Corollariums aus dem 1sten Lehrsatze „des 2ten Buchs dieser Satz bewiesen wird." Ich halte nehmlich für gut, dass die zween Sätze zuerst gesetzt werden: $DB \times DF = CD \times DA$; und $DB \times BF = CB \times BA$. Nun sieht man sogleich, dass $DB \times BF = DB\,(DB + DF)$; u. s. w.

folglich das $\triangle CBA$ gleichschenklicht ist; so wird $BD \parallel AC$ seyn, und folglich wird diese Linie die Grundlinie AC nicht schneiden. Wenn $OBC < 2BCA$; so wird die Linie BD auf die Seite von CB wie in der 150sten Fig.; jedoch auf die Seite von **BA** sich neigen, wenn $\angle OBC > 2BCA$, wie in der 151sten Fig. zu sehen ist.

Wenn man also in der 150sten Fig. $CE \parallel AB$ zieht; so ist $DA : DC = AB : CE$; nun ist $\angle BEC = \angle OBE$ (1, 4.) und folglich $= \angle EBC$; folglich (1, 10.) $EC = BC$; und folglich $DA : DC = AB : BC$.

Und wenn man in der 151sten Fig. $AE \parallel CB$ zieht; so ist $DA : DC = AE : BC$; nun ist $\angle AEB = \angle CBQ = \angle QBO = \angle ABE$; und folglich (1, 10.) $AE = BA$; folglich $DA : DC = AB : CB$.

Weiter ziehe man in der 150sten Fig. QA auf die Art, dass $\angle QAB = \angle BDC$; so ist $\triangle DCB \sim \triangle BQA$; denn $\angle QBA = \angle EBC$; $\angle QAB = \angle BDC$; folglich $\angle DCB = \angle BQA$; woraus (nach 4, 2.) folgt $DB : BC = BA : BQ$; folglich (nach dem 5ten Corollarium des 7ten Lehrsatzes):

Recht. aus BC, BA = Recht. aus DB, BQ = Recht aus DB, DQ — □ auf DB (2, 1. 5.)

Nun ist $\triangle DCB \sim \triangle DQA$, folglich $DB : DC = DA : DQ$ und Recht. aus DB, DQ = Recht. aus DC, DA; folglich:

1stens Recht. BC, BA = Recht. aus DC, DA — □ auf DB.

Man ziehe in der 151sten Fig. QC auf die Art, daſs <QCB = <BDA; ſo iſt △QCB ∾ △BAD; woraus folgt: DB:BA = BC:BQ; und Recht aus BA, BC = Recht aus DB, BQ = Recht aus DB, DQ — □ auf DB (2, 1. 5.) Nun iſt △DAB ∾ △DQC, und folglich DB:DA = DC:DQ, und Recht. aus DB, DQ = Recht. aus DA, DC; und folglich

2tens; Recht. aus BA, BC = Recht. aus DA, DC — □ auf DB.

Aus demjenigen, was hier No. 1. und No. 2. erwieſen iſt, erhellet, daſs das zweyte Glied unſeres Lehrſatzes in dieſem Falle in folgenden Lehrſatz verändert wird:

„Der Unterſchied zwiſchen dem Quadrat „dieſer Linie und dem Rechteck der Theile der „Grundlinie iſt dem Rechteck der übrigen „Seiten gleich."

Wenn man den ganzen Lehrſatz ſo wohl auf den innern, als äuſsern Winkel anwendet; ſo kann man ihn im allgemeinſten Sinne auf folgende Art ausdrücken:

„Wenn eine Linie einen Winkel von einem „Dreyecke, dieſer mag ein innerer oder äuſse„rer Winkel ſeyn, in zween gleiche Theile „theilt, und, im Fall ſie verlängert wird, auf „die

„die gegenüberliegende Seite oder Grundlinie „trift; so werden sich die Stücke, die diese Li„nie auf der Grundlinie macht, in dem nehmli„chen Verhältniſs der anliegenden Seiten zu „einander befinden: und die Summe oder „der Unterschied des Quadrats von dieser Linie „(die Summe nehmlich, wenn der innere Win„kel, der Unterschied, wenn der äuſsere Win„kel getheilt würde), und des Rechtecks aus „den genannten Stücken der Grundlinie wird „dem Rechtecke aus den übrigen Seiten gleich „seyn.

Der Herr R. Simson hat den ersten Theil dieser Eigenschaft in Rücksicht auf den äuſsern Winkel, als einen wichtigen Zusatz zu der dritten Proposition vom 6ten Buche *Euklids* vorgetragen. Allein Er hat vom zweyten Theile dieser Eigenschaft keine Meldung gethan. *(Sect. Conicae* p. 36.)

Corollarium.

AD + DC *oder* AC : AD = AB + BC : AB. *Es verhält sich also die Grundlinie zu einem ihrer Theile, wie die Summe der Seiten zu der Seite, die an dem genannten Theile anliegt.*

10ter Lehrsatz. 152ste Fig.

Die Linie (CE, AF), *welche aus zweyen Winkeln* (C *und* A) *eines Dreyecks* (CAG), *auf die gegenüberliegenden Seiten* (AG *und* CG) *getzogen werden, und sie in zween gleiche Theile theilen, begegnen*

einander in einem Punkte (D) *welcher an dem Ende der zween Drittheile von jeder Linie liegt, wenn man von der Spitze der Winkel an zählt: und wenn man aus dem dritten Winkel* (G) *durch diesen Punkt* (D) *eine Linie* (GB) *auf die dritte Seite* (CA) *zieht; so wird sie auch diese Seite in zween gleiche Theile theilen: daß diesemnach die drey Linien, welche, wenn man sie aus den dreyen Winkeln gezogen hat, die gegenüberliegenden Seiten in zween gleiche Theile theilen in einem Punkte, welcher an dem Ende der zween Drittheile von jeder Linie, von der Spitze der Winkel an gerechnet, liegt, einander begegnen.*

Was den 1sten Theil betrift: Construktion. Man ziehe FY || AG.

Beweis. Man beweisst aus dem 1sten Lehrsatze dieses, und dem 9ten des 3ten Brchs, dass FY die Hälfte von EG, folglich auch von AE seye, und man fährt fort, aus den ähnlichen Dreyecken ADE, YDF zu zeigen, dass AD = 2 DF.

Was den 2ten Theil betrift: Construktion. Man ziehe FR || CA.

Beweis. Man beweisst, wie zuvor, dass CB = 2 RF, und man fährt fort, den Schlussatz, aus den gleichwinklichten Dreyecken ADB und RDF zu ziehen.

Anmerkung. Dieser Lehrsatz ist in der Naturkunde von grossem Nutzen, da man sich desselben bedient, den Schwerpunkt eines Dreyecks zu bestimmen; dieser ist der Punkt D.

11ter

11*ter Lehrsatz* die 153ste Fig.

Wenn man aus zween Winkeln (G, C) *eines Dreyecks lothrechte Linien* (GB, CE) *auf die gegenüberliegende Seiten* (CA, AG) *zieht; so werden sie sich innerhalb oder außerhalb des Dreyecks in irgend einem Punkte begegnen, je nachdem die Seiten, auf welche sie getzogen werden, einen spitzigen oder stumpfen Winkel bilden. Wenn man ferner aus dem dritten Winkel* (A) *eine Linie* AF *durch diesen Punkt auf die dritte Seite* (CG) *zieht; so wird sie auch auf dieser Seite lothrecht stehen.*

Beweiß. *) △ CBD ∾ △ CAE ∾ GBA; folglich

CB : BD = BG : BA;
oder CB : BG = BD : BA;

und folglich, da die Winkel um B gerade Winkel sind; so ist

△ ABD ∾ △ CBG (5ter Lehrsatz), und folgl.
< BAD = < DGF;
< BDA = < FDG;

folglich < ABD = < DFG; folglich < DFG = <

1*stes Corollarium.*

Die Linien, welche aus den dreyen Winkeln eines Dreyecks auf die gegenüberstehende Seiten lothrecht gezogen werden, schneiden einander in einem Punkte.

2*tes*

*) Dieser Beweis ist nicht vollkommen geführt, ich möchte auch rathen, dass sich die Leser der in der Tafel zur rechten Seite stehenden Figur zuerst bedienten.

2tes Corollarium.

Wenn das Dreyeck rechtwinklicht ist; so ist der Punkt der gerade Winkel selbst.

3tes Corollarium.

Wenn das Dreyeck gleichseitig ist; so finden dieser und der vorhergehende Lehrsatz zugleich Statt; wenn anders alsdann die Lothlinien gerade diejenige Linien sind, die die Seiten in zween gleiche Theile theilen.

12ter Lehrsatz 56ste Fig.

Wenn man aus dem rechten Winkel (C) *eines rechtwinklichten Dreyecks* (A B C) *eine Lothlinie* (C D) *auf die Hypothenuse* (A B) *zieht; so wird sie das ganze Dreyeck in zwey Dreyecke* (A C D, B C D) *theilen, die unter einander, und mit dem ganzen Dreyecke ähnlich sind.* Eucl. 6. 8. — St. P. 255. 8te Pr.

Beweis. Mit dem 3ten Corollarium des 7ten Lehrsatzes im 1sten Buche, und dem 1sten Corollarium des 2ten Lehrsatzes aus diesem Buche.

1stes Corollarium.

Die senkrechte Linie (CD), *welche auf die Grundlinie fällt, ist zwischen den Stücken der Grundlinie die mittlere Proportional-Seite, das heißt:*

$$AD : DC = DC : DB.$$

1ste Anmerkung. Wenn man den 8ten Lehrsatz des 2ten Buchs auf das 5te Corollarium des

des 7ten Lehrsatzes in diesem Buche anwendet; so wird man sehen, dass der genannte 8 e Lehrsatz mit diesem Corollarium übereinstimmt, ob man es schon aus andern Gründen herleitet.

2tes Corollarium.

Jede der Seiten um den rechten Winkel (BC *oder* AC) *ist die mittlere Proportional-Seite zwischen der Hypothenuse* (AB), *und dem anliegenden Stücke* (BD *oder* AD) *jener Seite, das heißt,*

AB : AC = AC : AD;
AB : BC = BC : BD.

2te Anmerkung. Dies stimmt mit dem 2ten Corollarium des 8ten Lehrsatzes im 2ten Buche überein, wenn man das 5te Corollarium des 7ten Lehrsatzes in diesem Buche auf unser Corollarium anwendet.

3te Anmerkung. Aus dem vorigen Corollarium wird der Lehrsatz des *Pythagoras* (2, 7.) vermöge des 5ten Corollariums vom 7ten Lehrsatz in diesem Buche, und des 4ten Corollariums von 1sten Lehrsatze in dem 2ten Buche, auf eine sehr leichte Art hergeleitet.

3tes Corollarium.

Aus dem 1sten und 2ten Corollarium, verbunden mit dem 5ten Corollarium des 7ten Lehrsätzes, folgt, daß

□ auf DC = Recht. aus AD, DB; und

□ auf

□ auf CB = Recht. aus AB, DB;
folglich □ auf DC : □ auf CB = AD : AB,

dies ist in dem 13ten Buche *Euklids* das *Lemma* nach dem 13ten Lehrsatze.

4te Anmerkung. DC und CB sind daher in subduplicater (unterverdoppelter) Verhältniss von AD und AB; dies drückt man auf diese Art aus:

$$DC : CB = \sqrt{AD} : \sqrt{AB}.$$

Die Alten würden dies auf folgende Art ausdrücken: die Machten der Linien DC und CB verhalten sich, wie die Linien AD und AB.

4tes Corollarium. 156ste Fig.

Wenn man die Lothlinie CD *verlängert, biss sie der Linie* AF, *welche man aus A auf der Linie* CA *senkrecht errichtet hat, in* F *begegnet; so werden* AD *und* CD *die mittlere Proportional-Linien zwischen* DF *und* DB *seyn;*

denn DF : AD = AD : DC;
und AD : DC = DC : BD; folglich
∺ DF, AD, DC, BD.

5te Anmerkung. Wenn es also möglich wäre, im Falle DF und DB rechtwinklicht auf einander gesetzt werden, die Linien AF, AC, CB so zu ziehen, dass AF und AC um A herum auf der verlängerten Linie BD, und AC und BC um C herum auf der verlängerten Linie DF rechte Winkel machten; so würde die berühmte Aufgabe: *zwo mittlere Proportional-*

„Linien

„*Linien* zwischen zwoen gegebenen Linien zu finden," geometrisch aufgelöst seyn. Allein dies ist unmöglich. Indessen hat *Plato* einen Ausweg erfunden, dieses mit Hülfe zweener Winkelhaken mechanisch zu bewerkstelligen. Dieser Ausweg besteht bloss in einer Anwendung von diesem Corollarium. Siehe meine 2te Anmerkung zu der 20sten Aufgabe im 1sten Buche. (S. auch die folgende 6te Anmerkung.)

5tes Corollarium.

Wenn man aus B, *auf* AB, BI *und aus* I, *auf* ACI, IL *beyde senkrecht errichtet; so werden* AB, AI *die zwo mittlern Proportional-Linien zwischen* AC *und* AL *seyn; denn nach dem 2ten Corollarium ist*

AC : AB = AB : AI
AB : AI = AI : AL

und folglich AC, AB, AI, AL.

6te Anmerkung. Hierauf gründet sich die Verfassung eines Instruments, das *Cartesius* erfunden hat, um zwischen zwoen gegebenen Linien zwo oder mehrere mittlere Proportional-Linien zu ziehen, ich rede von zwoen oder *mehreren* Proportional-Linien; denn man kann auf die nehmliche Art fortfahren, auf AL, und AI, Lothlinien zu errichten, und dies so oft wiederhohlen, als man will. Es werden immer ähnliche Dreyecke dadurch entstehen.

13*ter Lehrsatz.* 70ste Fig.

Aehnliche Dreyecke verhalten sich zueinander, wie die Quadrate ihrer gleichliegenden Seiten; oder mit andern Worten: sie stehen in verdoppelter Verhältniß ihrer gleichliegenden Seiten.

Eukl. 6, 19 — St. PP. 260. 261. Pr. 14.

Construktion. Man nehme an, dafs BG und EH die Höhen der Dreyecke ABC und DEF seyn.

Beweis. Mit dem 7ten Lehrsatze, und dem 2ten Corollarium des 2ten Lehrsatzes; oder ohne Construktion: mit dem 2ten Corollarium des 7ten Lehrsatzes, dem 2ten Lehrsatze dieses Buchs, und dem 2ten Corollarium des 11 Lehrsatzes im 3ten Buche.

Anmerkung. 25ste Fig. ich habe in der *Anmerkung* zu der 17ten Erklärung im 3ten Buche gesagt, dafs es scheine, dieser Ausdruck von *verdoppelter Verhältniß* sey bey *Euklid* dem ersten Anschein nach in einer andern Bedeutung, als in diesem Werke zu nehmen. Indessen habe ich (*Anm.* zu 3, 14.) gezeigt, wie diese beyde Bedeutungen dennoch in der That übereinstimmen*). Nach der Bedeutung, welche *Euklid* dem Worte von *verdoppelten Verhältniß* giebt, mufs man beweifsen, dafs man, wenn

*) S. W. I G. *Karstens* Lehrbegriff der gesammten Mathematik. 1sten Theil. 2te Auflage. Greifswald 1782. SS. 369 — 373. §§. 232 — 240.

wenn BH zu BA und DE dritte Proportional-Linie ist, △ BAC : △ DEF = AB : BH haben würde. Diesen Beweis führt man auf folgende Art:

BC : BA = FE : DE;
folglich BC : FE = BA : DE.
Allein es ist BA : DE = DE : BH;
folglich BC : FE = DE : BH.

Daher ist (nach dem 4ten Corollarium des 7ten Lehrsatzes)

△ BHC = △ DEF;
Nun ist △ BCA : △ BHC = AB : BH; (4, 6.)
folglich △ BCA : △ DEF = AB : BH.

2te Abtheilung.

Ueber die ähnlichen Vielecke.

14ter *Lehrsatz.* 71ste Fig.

Wenn man Vielecke (M *und* N), *welche aus einer gleichen Anzahl Seiten bestehen, durch Diagonal-Linien* (AC, AD, FH, FI), *die man aus einem der Winkel* (A *und* F) *nach den andern Winkeln zog, in Dreyecke* (BAC, CAD, DAE *und* GFH, HFI, IFK) *getheilt hat; so werden diese Vielecke ähnlich seyn, wenn je zwey und zwey in ihrer Ordnung angenommene Dreyecke ähnlich sind* (*namentlich:* △ BAC ∾ △ GFH; △ CAD ∾ △ HFI; △ DAE ∾ △ IFK).

St. SS. 262 — 264. incl. Pr. 15. und Corollarium.

Beweis. Man beweiſst aus der Gleicheit der Winkel in den Dreyecken die Gleichheit der gleichliegenden Winkel in beyden Vielecken. Dies iſt der erſte Theil dieſes Lehrſatzes, der zu beweiſen war.

Man beweiſst den zweyten Theil deſſelben, indem man aus der Verhältniſs-Gleichheit der Seiten in den Dreyecken die Verhältniſs-Gleichheit der gleichliegenden Seiten in den Vielecken ableitet.

Anmerk. Es muſs dieſes bewieſen werden, um darzuthun, daſs ähnliche Vielecke möglich ſeyn, und anzugeben, wie man ſie beſchreiben könne? Siehe die 29ſte Aufgabe des 3ten Buchs.

Corollarium.

Wenn zwey Dreyecke ähnlich ſind; ſo werden die Parallelogramme, welche eine der Seiten von dieſen Dreyecken zu Diagonalen haben, und folglich von dieſen Dreyecken das doppelte ſind, ebenfalls ähnlich ſeyn: und daher findet alles, was von den ähnlichen und gleichwinklichten Dreyecken bewieſen worden iſt, auch in Hinſicht auf die ähnlichen Parallelogramme Statt.

15*ter Lehrſatz.* 71ſte Fig.

Aehnliche Vielecke (M *und* N) *werden, wenn man die Diagonale auf eine gleiche Art gezogen hat, durch*

durch dieselbe in ähnliche Dreyecke getheilt, und der Inhalt dieser Vielecke in der Verhältniß der Quadrate auf ihren ähnlichliegenden Seiten, oder in der doppelten Verhältniß dieser Seiten.

Eukl. 6, 20. — St. S. 264. Pr. 16.

Beweis des 1sten Theils. Mit dem 4ten Lehrsatze.

Beweis des 2ten Theils. Durch die Erwägung, daſs die Vielecke ſich wie die Summen ihrer Dreyecke, die Dreyecke aber wie die Quadrate ihrer gleichliegenden Seiten, und folglich wie die der gleichliegenden Seiten der Vielecke verhalten. Hieraus ergiebt ſich der Lehrſatz nach dem 12ten Lehrſatze im 3ten Buche.

Anmerk. Man kann nun die 30ſte, 31ſte, 32ſte, 33ſte, 34ſte Aufgaben im 3ten Buche auflöſen.

1ſtes Corollarium.

Wenn vier Linien proportionell ſind; ſo verhalten ſich die Quadrate, welche auf ihnen beſchrieben worden ſind, in verdoppelter Verhältniß dieſer Linien: und folglich kömmt das geometriſche Quadrat mit der verdoppelten Verhältniß überein: und man kann ſich der arithmetiſchen Quadrate, oder der zweyten Machten der Zahlen, welche die Länge von gewiſſen Linien angeben, ſtatt der geometriſchen Quadrate bedienen. Siehe des 3ten Buchs 18te Erklärung

und

und hier oben 7ten Lehrsatzes 8tes Corollarium No. 1. und No. 3.

König bey *Euklid* 6, 20.

2tes Corollarium.

Es erhellet aus diesem Lehrsatze, wenn man ihn auf Parallelogramme anwendet, und mit der 9ten Anmerkung zu den 7ten Lehrsatze vergleicht, in welchem Sinne Euklid *in dem 18ten Satze seines 8ten Buches sagte: daß ähnliche Flächenzahlen in verdoppelter Verhältniß der gleichliegenden Seiten stünden und (nach dem 26sten Lehrsatze), daß sie sich zu einander verhielten, wie eine Quadrat-Zahl sich zu einer andern Quadrat-Zahl verhalte.*

3tes Corollarium.

Wenn drey Linien stetig proportionell sind; so verhält sich die Figur auf der ersten dieser Linien zu der ähnlichen Figur auf der zwoten derselben, wie sich die erste Linie zu der dritten Linie verhält. (3, 14.)

Tacquet bey *Euklid* 6, 20. 2. *)

16ter Lehrsatz.

Wenn vier Linien proportional sind; so werden die ähnliche und ähnlich liegenden Figuren auf der ersten und zwoten Linie in der nehmlichen Verhältniß der

*) In der oben angeführten Ausgabe 6, 20. 3.

der ähnlichen und ähnlich liegenden Figuren auf der dritten und vierten Linie stehen; und umgekehrt: Wenn zwo ähnliche Figuren in der nehmlichen Verhältniß zwoer anderer ähnlicher Figuren stehen; so werden die ähnlich liegenden Linien, worauf diese Figuren beschrieben sind, proportional seyn.

Eukl. 6, 22. — *St.* P. 266. Pr. 18.

1ster Beweis. Nach Euklid: A, B, C, D, seyn die vier proportionale Linien.

Construktion für den 1sten Theil des Lehrsatzes. Nimm an, *b* sey die dritte proportionale Linie zu A und B, und *d* sey die dritte proportionale Linie zu C und D.

Beweis. A:B = B:b;) C:D = D:d;) Construktion.
A:B = C:D;
folglich B:b = D:d;
und A:C = b:d;
oder A:b = C:d. *)
Allein Fig. auf A : Fig. auf B = A:B;) 15ten Lehrs.
Fig. auf C : Fig. auf D = C:d;) 3tes Cor.
Folglich Fig. auf A : Fig. auf B = Fig. auf C : Fig. auf D.

Construktion für den 2ten Theil. Nimm an, A : B = C : d.

 Beweis.

*) Diese Verhältniss-Gleichheit ergiebt sich schon vor der vorhergehenden.

Beweis. □ auf A : □ auf B = □ auf C : □ auf d; (nach dem 1sten Cor. des 15ten Lehrs.)
und □ auf A : □ auf B = □ auf C : □ auf D;
folglich □ auf d = □ auf D, und d = D;
folglich A : B = C : D.

Anmerk. Dieser Beweis Euklids, den ich im zweyten Theile etwas einfacher geführt habe, ist sehr schön, und vollkommen geometrisch.

2ter *Beweis: Vom ersten Theile des Lehrsatzes.* Mit dem 15ten Lehrsatze *) dessen 1sten Corollarium und dem 1sten Corollarium des 10ten Lehrsatzes im 3ten Buche.

2ter *Beweis. Vom 2ten Theile.* Mit dem 1sten Corollarium des 10ten Lehrsatzes im 3ten Buche, und dem 1sten Corollarium des 15ten Lehrsatzes in diesem Buche.

17*ter Lehrsatz.* 73ste Fig.

Alle reguläre Vielecke, die aus einer gleich großen Anzahl Seiten zusammengesetzt sind, sind einander ähnlich, und ihr Inhalt steht in der Verhältniß der Quadrate auf den ähnlich liegenden Seiten, oder auf den Strahlen (Radien), oder auf den Lothlinien, oder in verdoppelter Verhältniß dieser Seiten, Strahlen oder Lothlinien.

Beweis.

*) Man hat hier nur das 1ste Cor. des 15te Lehrs. aus diesem Buche nicht, den Lehrsatz selbst nöthig.

Beweis für den 1sten Theil des Lehrsatzes. Vermöge des 14ten *Lehrsatzes*, und der Beschaffenheit der ähnlichen Vielecke.

Beweis für den 2ten Theil dieses Lehrsatzes. Mit dem 15ten und 13ten Lehrsatze.

Corollarium. 144ste, 145ste, 147ste Fig.

Folglich sind die Vielecke, von denen ich in dem 15*ten und* 16*ten Lehrsatze des* 2*ten Buchs gesprochen habe, den Vielecken, worinnen sie sich befinden, ähnlich; und in dem Falle des* 18*ten Lehrsatzes* (147*ste Fig.*) *wird das Vieleck* EFGIL *nach Umkreis und Inhalt das möglich kleinste seyn, wenn die Punkte* E, F, G, I, L, *mitten auf den Seiten* AD, DC, CB, BQ, QA *liegen; denn alsdann ist der Strahl* OE *auf* AD *senkrecht, und folglich die kürzeste Linie.*

18*ter Lehrsatz.* 73ste Fig.

Die Umkreiße derjenigen regulären (regelmäßigen) Vielecke, die eine gleiche Anzahl Seiten haben, auf ungleichen Linien aber beschrieben worden sind, verhalten sich zu einander, wie ihre Strahlen oder Lothlinien.

Beweis. Vermöge der Eigenschaft der Vielecke, namentlich mit dem Corollarium der 6ten Erklärung im 2ten, und dem 2ten Lehrsatz in diesem Buche.

Corollarium.

In allen regelmäßigen Vielecken, welche die nehmliche Anzahl Seiten haben, ist die Verhältniß des Umkreises zu der Lothlinie, oder dem Strahle, immer die nehmliche.

19ter Lehrsatz.

Regelmäßige Vielecke mit einer ungleichen Anzahl von Seiten stehen in zusammengesetzter Verhältniß ihrer Umkreise und Lothlinien.

Beweis. Mit dem 17ten Lehrsatze im 2ten und dem 7ten in diesem Buche.

1stes Corollarium.

*Wenn die Umkreise gleich sind; so verhält sich daher der Inhalt der Vielecke, wie sich ihre Lothlinien verhalten; und wenn ihr Inhalt gleich ist; so stehen ihre Umkreise in umgekehrter Verhältniß ihrer Lothlinien (3ten Buche 4tes Axiom *) und 3ten Buchs 5ter Lehrsatz.)*

2tes Corollarium.

Wenn folglich ein gleichzeitiges Dreyeck, ein Quadrat, und ein regelmäßsiges Sechseck den nehmlichen Umkreis haben; so ist der Inhalt des Sechsecks grösser, als der des Quadrats, und der des Quadrats grösser, als der des Dreyecks.

Beweis.

*) Man könnte dieses Axioms hier entbehren.

Beweis. 144ste Fig. Die Lothlinie CX in dem Sechsecke PQRSTU $= \sqrt{CR^2 - RX^2} = \sqrt{RS^2 - \frac{1}{4}RS^2} = \sqrt{\frac{3}{4}RS^2} = RS\sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\text{Umkreis}}{6} \text{ x } \sqrt{\frac{3}{4}} =$ Umkreis x $\sqrt{\frac{3}{4 \text{x} 36}} =$ Umkr. x $\sqrt{\frac{1}{48}}$.

Die Lothlinie in dem Quadrate ist die Hälfte seiner Seite, folglich hier $\frac{\text{Umkreis}}{8} =$ Umkr. $\sqrt{\frac{1}{64}}$, folglich kleiner, als die des Sechseckes.

In dem gleichseitigen Dreyecke DAF ist die Lothlinie CX $= \frac{1}{3}$ AX (11ten Lehrsatzes 3tes Corollarium) $= \frac{1}{3}\sqrt{AF^2 - FX^2} = \text{x } \frac{1}{3}\sqrt{AF^2 - \frac{1}{4}AF^2} = \frac{1}{3}AF\sqrt{\frac{3}{4}} = AF\sqrt{\frac{3}{9 \text{x} 4}} = AF\sqrt{\frac{1}{12}} = \frac{1}{3}$ Umkr. $\sqrt{\frac{1}{12}} =$ Umkr. $\sqrt{\frac{1}{9 \text{x} 12}} =$ Umkr. $\sqrt{\frac{1}{108}}$, folglich kleiner, als die des Quadrats.

3tes Corollarium.

Und folglich, wenn der Inhalt eines regelmäßigen Sechsecks, der eines Quadrats, und der eines gleichseitigen Dreyeckes gleich sind; so hat das Sechseck einen kleinern Umkreis, als das Quadrat, und das Quadrat hat einen kleinern Umkreis, als das Dreyeck.

Anmerk. Die Bienen, die ihren Häuschen eine sechseckige Gestalt geben, bedienen sich darum dieser Figuren, in welchen kein Zwischenraum verlohren geht. Diese Figuren schliessen den grösten Inhalt unter dem nehmlichen Umkreise ein; oder sie umfassen den nehmlichen Inhalt mit dem kleinsten Umkreise, und folglich mit der möglichst geringen Quantität von Materie (Stoff).

Siehe *La Chapelle Institutions de Géométrie. T. II. p.* 217 — 223.

20ster Lehrsatz. 72ste Fig.

In allen rechtwinklichten Dreyecken ist die Figur auf der Hypothenuse der Summe der beyden ähnlichen und ähnlich liegenden Figuren, die sich auf den Seiten befinden, welche den rechten Winkel einschließen, gleich.

Eukl. 6, 31. — St. S. 280. Pr. 30. und das Corollarium.

Beweiß. Mit dem 15ten Lehrs.; 3, 8; dem 15ten Lehrs.; *) 3, 11; 2, 7; und 3, 9.

1ste Anmerkung. Der Lehrsatz des *Pythagoras* (2ten Buchs 7ter Lehrsatz) ist blos ein besonderer Fall von dem so eben vorgetragenen. Auch hängen sie beyde von einer allgemeinern Eigenschaft der Dreyecke ab, wie ich bereits in der 2ten Anmerkung zu dem 7ten Lehrsatze des 2ten Buchs angezeigt habe.

2te Anmerkung. Man ist nun im Stande, die 35ste Aufgabe im 3ten Buche aufzulösen.

21ter Lehrsatz. 154ste Fig.

Wenn man in einem regelmäßigen Fünfeck aus den zween Endpunkten (H, K,) *von einer der Seiten*

tem

*) Dieser Satz ergiebt sich in dem Beweisse. Man könnte ihn daher auch zwischen Klammern einschliessen.

ten (KH,) *nach den Endpunkten der anliegenden Seiten* (KC, HE,) *gerade Linien* (HC, KE,) *ziehet; so werden sie 1stens das Vieleck in eine Raute* (CBE), *in zwey gleichschenklichte Dreyecke* (KxC, HxE,), *deren Schenkel den Seiten des Fünfecks gleich seyn werden, und in ein drittes gleichschenklichtes Dreyeck* (KxH) *theilen, dessen Grundlinie die gegebene Seite des Fünfecks ist; die genannten Linien* (HC, KE) *werden einander 2tens in stetiger Proportion schneiden, und ihr gröstes Stück wird der Seite des Fünkecks gleich seyn; 3tens, wenn man aus jedem Winkel nach allen übrigen Winkeln Linien ziebt; so wird jede dieser Diagonalen von zwoen andern auf folgende Art geschnitten, daß das gröste Stück, welches durch die erste von ihnen abgeschnitten worden ist, durch die zwote abermals in stetiger Proportion geschnitten wird, indem das kleinste Stück den mittlern Theil zwischen den zween Schnitten ausmacht; und 4tens werden diese Linien dadurch, daß sie einander begegnen, innerhalb des Fünfecks, und um den nehmlichen Mittelpunkt herum ein neues Fünfeck bilden, welches dem gegebenen ähnlich, doch in Rücksicht auf dasselbe umgekehrt gelegen seyn, und dessen Seite sich zu der des gegebenen Vielecks, wie das kleinste Stück der geschnittenen ganzen Linie zu dieser ganzen Linie verhalten wird.*

Euklid 13, 8. für No. 2. in diesem Lehrsatze.

Beweis. Vom 1sten Theile.

$$<KHE = \frac{6R}{5} \quad (2, 11. 1.);$$

folglich $<KHC = \frac{2}{5}R$; folglich $<CHE = \frac{4}{5}R$;

und $<(HE + <BEH = \frac{10R}{5} = 2R$;

folg-

folglich (1, 4.) CH || BE.

Auf die nehmliche Art beweiſst man KE || CB.

Folglich iſt CBEx eine Raute (1, 13te Erklärung) und die Seiten CB, BE, Ex, xC, ſind einander gleich.

Folglich ſind △△CxK, und ExH gleichſchenklicht und einander gleich; folglich auch Kx = Hx, und folglich iſt auch △HxK gleichſchenklicht.

Vom 2ten Theile. In den Dreyecken △△KxH und KEH iſt der < HKE gemeinſchaftlich; < KHx = < KEH; < KxH = < KHE; und folglich (2ter Lehrſatz) KE : EH = KH : Hx, oder KE : Ex = Ex : Kx; und ebenfalls

HC : xC = xC : Hx.

Folglich ſchneiden die Linien EK und HC einander in ſtetiger Proportion (2te Erklärung).

Vom 3ten Theile.

HC : xC = xC : Hx; folglich (3, 8.)
HC − xC : xC = xC − Hx : Hx;

oder

Hx : xC = xC − yC : *) Hx;

oder

Hx : xC = Xy : Hx;

Folg-

*) Daſs yC = Hx ſeyn, wird ſonſt auf eine leichte Art bewieſen.

folglich

$$Hx : xy = xC : Hx = HC : xC;$$

oder

$HC : xC = xC : Hx$ oder Cy, und folglich, da HC in x nach stetiger Proportion geschnitten ist; so ist auch xC in y nach stetiger Proportion geschnitten (4, 7. 8te Anmerkung.

Vom 4ten Theile. Daſs das Fünfeck ONvxy regelmäſsig ſey, erhellet aus der Gleichheit der Dreyecke OBN, NEv, vHx, xKy, yCo, und folglich iſt es dem gegebenen Vielecke ähnlich (17ter Lehrſatz.)

Daſs beyde den nehmlichen Mittelpunkt haben, erhellet daraus, daſs die Linien, welche man aus B und C auf HK und EH ſenkrecht ziehen würde, durch den Mittelpunkt des gegebenen Vielecks gehen, auch ſenkrecht auf oN, yO fallen, und durch x und v, und folglich durch den Mittelpunkt des neuen Vielecks gehen müſsten.

$$\text{Weiter: } \triangle OPN \sim \triangle KBH; \text{ folglich}$$
$$ON : KH = BN : BH.$$

1ſte Anmerkung. Alle Eigenſchaften, deren in dieſem Lehrſatze gedacht worden iſt, gehören *allein* dem Fünfeck zu, dieſe allein ausgenommen, daſs die Diagonallinien dadurch, daſs ſie einander begegnen, ein neues ähnliches Vieleck bilden. Dieſe Eigenſchaft iſt allen regelmäſsigen Vielecken, vom Fünfecke an gerechnet, zwar noch mit einigen beſondern

Rück-

Rückſichten eigen; wovon ich beym 28ſten Lehrſatze des 6ten Buchs handeln werde.

2te Anmerkung. Wird man das neue Fünfeck wieder auf die nehmliche Art theilen; ſo wird aus dieſer Theilung ein neues Fünfeck entſtehen, dem alle jene genannte Eigenſchaften zukommen.

Fünf-

Fünftes Buch.

Ueber den Kreis.

Erklärungen.

1ste 33ste Fig.

Man nennt *Sehne* (*Chorde, Spannlinie*) *eines Kreisbogens eine Linie* (*z. B.* BE, BD, AF), *welche im Kreise gezogen wird, und den Umkreis auf beyden Seiten berührt, und folglich irgend einen Bogen* (*z. B.* BDE) *begränzt. Wenn eine solche Sehne durch den Mittelpunkt geht; so führt sie den Nahmen Durchmesser* (*Diameter: Mittellinie*), *begränzt auf beyden Seiten den Halbkreis, und theilt den Kreis folglich in zween gleiche Theile.*

Eukl. 1. Erklr. VI. — W. g. §. 14. *) — St. S. 8 9. Erkl. und S. 4. Erkl. 11.

1stes

*) In der angef. Ausg. §§. 38. 39.

1stes Corollarium.

Eine ***Sehne*** *(****Spannlinie, Chorde****) begränzt immer den Halbkreis entweder auf beyden Seiten, wenn sie durch den Mittelpunkt geht, und folglich Durchmesser ist, oder auf der einen Seite einen Bogen* (BDE), *der kleiner, und auf der andern Seite einen Bogen (z. B.* BAIFE), *der größer, als der Halbkreis, so daß beyde Bogen den ganzen Umkreis zusammen machen.*

2tes Corollarium. 43ste Fig.

Wenn eine Sehne (AE) *durch den Mittelpunkt geht, und folglich Durchmesser ist, oder den Halbkreis* (ADE) *begränzt; so kann man aus irgend einem Punkte* (D) *dieses halben Umkreises nach den Endpunkten* (E *und* A) *des Durchmessers Sehnen* (DE, DA,) *ziehen, wovon jede einen Bogen* (DE, DA,) *begränzen wird; und da diese Bogen immer einen halben Umkreis zusammen machen; so nennt man den einen das* ***Complement*** *zu dem andern; das heißt, die* ***Ergänzung****, um den Halbkreis zu machen; folglich ist der Bogen* DE *das* ***Complement*** *zu dem Bogen* DA, *und umgekehrt; wovon ich im 8ten Buche mehr sagen werde.*

2te; 33ste Fig.

Man nennt ***Abschnitt*** *(****Kreisstück; Segment,****)* (BDE) *einen Theil des Kreises innerhalb des Umkreises eines Bogens* (BDE) *und der Sehne* (BE), *die ihn begränzt.*

Euclid. 1, 18te. 19te Erkll. — St. S. 103. Def. 5. S. 104. Def. 8.

3te;

Man drückt sich von einem Winkel aus, er sey in einem Abschnitte (BDE), *wenn seine Spitze in dem Bogen ist, und seine Schenkel* (DB, DE,) *bis zu den Endpunkten* (BE) *der Sehne, die den Abschnitt begränzt, herunter laufen.*

Eukl. 3. 7te Erkl. — St. SS. 103. 104. 6te, 7te Erkll.

4te;

Man sagt von einem Winkel, er stehe auf einem Bogen, wenn seine Schenkel sich bis zu den Endpunkten dieses Bogens erstrecken: und er heißt ein Winkel im Mittelpunkte, oder im Umkreise, je nachdem die Spitze C, *oder* D *des Winkels* (BCE; *oder* BDE) *im Mittelpunkte* (C), *oder im Umkreise* (*in* D) *liegt.*

Eucl. 3, 8te Erkl. — St. S. 103. 6te Erkl.

Corollarium. 88ste Fig.

Ein Winkel (EBF) *im Umkreise, welcher folglich in einem Abschnitte* (EBF) *liegt* (3*te Erkl.*) *ruht also auf dem Bogen* (EAF), *der mit dem Bogen des Abschnittes, worin der Winkel liegt, den ganzen Umkreis macht.*

Der Bogen, EAF *ist daher kleiner, gleichgroß, oder größer, als der halbe Umkreis, je nachdem der Abschnitt, worin der Winkel liegt größer, gleich groß, oder kleiner, als der Halbkreis ist.*

5te; 33ste Fig.

Man heißt ***Ausschnitt*** *(Sektor) ein Stück der Kreisfläche, das zwischen zween Strahlen (****Halbmessern, radiis****)* (BC, CE,) *und einem Bogen* (BDE), *zu dessen Endpunkten die Strahlen sich erstrecken, enthalten ist.*

Eukl. 3, 9te Erkl. — *St.* S. 104. 9te Def.

Anmerkung. Der Unterschied zwischen einem *Abschnitte*, und einem *Ausschnitte* besteht also darin, daſs der Abschnitt von einem Bogen und einer Linie, namentlich der Sehne, der *Ausschnitt* aber, von einem Bogen und zwo Linien, welche jedoch durch den Mittelpunkt gehen, gebildet worden ist. Folglich gehört der Halbkreis zugleich zu den Abschnitten und Ausschnitten.

6te;

Man heißt ***Berührungs-Linie*** *(oder* ***Tangente****) des Kreises eine Linie* (HFK), *welche den Kreis trift, jedoch, wenn man sie verlängert, ihn nicht schneidet.*

Eukl. 3, 1ste Erkl. — *St.* S. 101. 4te Def.

An-

Anmerkung. Sollte aus dieſer Erklärung nicht gerade-zu folgen, daſs eine Berührungslinie den Kreis nur in *einem* Punkte berühre? Allein es muſs bewieſen werden, daſs Linien möglich ſeyn, die den Kreis in einem Punkte berühren, und, ſo weit man ſie auch verlängere, ihn nicht ſchneiden. Dies werde ich im 7ten Lehrſatze thun.

7te; 34ſte Fig.

Man ſagt von zween Kreiſen, daß ſie einander berühren, wenn ſie einander treffen, und bey Verlängerung nicht ſchneiden. Die Berührung geſchieht entweder von auſſen, wenn der eine ganz auſſerhalb des andern, oder von innen, wenn der eine ganz innerhalb des andern fällt.

Eucl. 3, 3te Erkl. — *St.* S. 89. 2te Def.

Axiome,

oder

Grundſätze. *)

1ſter Grundſatz.

Kreiſe ſind gleich, wenn man ſie mit gleichen Halbmeſſern beſchrieben hat.

Eukl. 3, 1ſtes Ax.

*) algemeene kundigheden, allgemeine Wahrheiten, allgemeine Sätze, Grundſätze.

2ter.

Der Durchmesser ist doppelt so groß, als der Halbmesser. *)

3ter.

Wenn man von dem Mittelpunkte nach irgend einem Punkte eine Linie zieht, welche kürzer als der Halbmesser ist; so fällt dieser Punkt, so wie auch die ganze Linie, innerhalb des Kreises; z. B. CF *in der 34sten Fig.*

1ste Abtheilung.

Ueber die Linien, welche man in und zu dem Kreise zieht.

1ster Lehrsatz. 35ste Fig.

Wenn man in dem Umkreise des Kreises zween Punkte (A, B) *annimmt, und vermittelst einer geraden Linie* (AB) *verbindet; so wird diese ganze Linie innerhalb des Kreises fallen.*

Eukl. 3, 2.

Construktion. Ziehe auf diese Linie aus dem Mittelpunkte irgend eine Linie (CD).

Be-

*) des nehmlichen Kreises.

Beweis. Mit dem 2ten Theile des 16ten Lehrsatzes, dem 11ten und 14ten Lehrsatze im 1sten, und dem 3ten Grundsatze in diesem Buche.

2ter Lehrsatz. 77ste Fig.

Wenn drey Punkte (A, B, D) *in keiner geraden Linie liegen; so befinden sie sich immer in einer Kreislinie: oder mit andern Worten; so kann man immer einen Kreis beschreiben, dessen Linie durch jene Punkte gehen wird.*

Construktion. Ziehe BD, BA, AD; nimm an, dass BD und AD in K und L in zween gleiche Theile getheilt seyn, und KC und LC, die auf BD und AD senkrecht stehen, einander in C begegnen; ziehe CB, CD, CA. So hast du zu beweisen, dass CB, CD, CA einander gleich, und folglich Halbmesser eines Kreises seyn, wovon C der Mittelpunkt wäre.

Beweis. Dass CB = CD und CD = CA sey, folgt aus dem 8ten Lehrsatze des 1sten Buchs.

Corollarium.

Die vorige Construktion nebst dem Beweise geben folgende Eigenschaft von den Dreyecken zu erkennen:

Alle Lothlinien, welche man mitten auf den Seiten eines Dreyecks errichten kann, treffen in einem Punkte innerhalb oder ausserhalb dieses Dreyecks zusammen: und die Linien, welche man aus diesem Punkte

nach den Winkeln des Dreyecks gezogen hat, sind gleich.

Hieraus folgt ebenfalls, daß, wenn das Dreyeck gleichseitig ist, diese Lothlinien durch die Spitzen der gegenüberliegenden Winkel gehen, und diese in zween gleiche Theile schneiden werden (1, 11. 4.), *und darum heißt man den Schneidungs- oder Vereinigungs-Punkt in diesem Falle den Mittelpunkt des Dreyecks. Er steht, von der Spitze an gerechnet, auf zween Drittheilen jeder dieser Lothlinien. Siehe* 4, 11. 3. *und* 4, 10.

Anmerk. Man kann in der 10ten Aufgabe des 4ten Buchs die Art kennen lernen, wie man durch drey gegebene Punkte eine Kreislinie ziehen könne?

3ter Lehrsatz. 41ste Fig.

Ein Winkel (GEF) *in dem Mittelpunkt ist doppelt so groß, als der Winkel* (GIF) *in dem Umkreis, der auf dem nehmlichen Bogen* (GF) *steht.*

Eucl. 3, 20. — *W.* §§. 112. 113. *) — *St.* S. 104. Pr. 10.

Construktion. Man zieht aus er Spitze I den Durchmesser IEL.

Beweis. Mit 1, 11. und 7. beyde Lehrsätze auf das Dreyeck IEG, und hierauf ebenfalls auf das Dreyeck IEF

*) W. g in der angef. Ausgabe §§. 313. 314.

IEF angewandt. Man nimmt ſodann die Summe oder die Differenz der Winkel LEF und LEG, LIF und LIG, je nachdem die Linie IL innerhalb oder auſſerhalb des Winkels FEG fällt.

1ſtes Corollarium.

Die Summe oder der Unterſchied zweener Winkel in dem Umkreiſe iſt die Hälfte von der Summe oder dem Unterſchiede zweener Winkel in dem Mittelpunkte, welche auf den nehmlichen Bogen ruhen.

2tes Corollarium. 88ſte Fig.

Die Summe der Winkel (EAF *und* EBF) *in dem Umkreiſe, welche auf Bogen liegen, die den ganzen Umkreis zuſammen ausmachen, ſind zween rechten Winkeln gleich, und die Summe der Winkel im Umkreiſe, die auf Bogen liegen, welche den halben Umkreis zuſammen machen, ſind einem rechten Winkel gleich, und umgekehrt.* *)

3tes Corollarium.

Alle Winkel in dem Umkreiſe, die auf dem nehmlichen Bogen liegen, ſind gleich.

Eukl. 3, 21. — *W.* §. 114. **) — *St.* S. 106. Pr. 11.

*) S. W. g. §. 317.

**) W. §. 315.

4ter Lehrsatz 36ste Fig.

In dem nehmlichen Kreise, oder in gleichen Kreisen liegen gleiche Winkel, wenn sie alle in dem Mittelpunkte (DCB, BCA) *oder wenn sie alle in dem Umkreise, auf gleichen Bogen* (DHB, BIA) *liegen: und umgekehrt.*

Eukl. 3, 26, 27. — *W.* §. 114. *)

Construktion. Man zieht die Sehnen DB, BA.

Beweis des 1sten Theils vom Lehrsatze. Aus dem 8ten Lehrsatz des 1sten Buchs folgt, daſs BD = BA, und folglich, wenn A auf D fällt, nachdem man B auf B, und AB längs BD legt, werden auch, wegen der Gleichheit der Halbmesser, die Bogen DHB und BIA auf einander fallen und gleich seyn.

Beweis des 2ten Theils vom Lehrsatze. Vermöge des Ungereimten, wenn man das Gegentheil annimmt, nach dem 1sten Theile dieses Lehrsatzes.

1stes Corollarium.

Ein Winkel, entweder im Umkreise, oder im Mittelpunkte, welcher auf einem doppelten dreyfachen Bogen u. s. w. liegt, ist zweymahl, dreymahl u. s. w. so groß, als der Winkel, der in dem nehmlichen oder einem gleichen Kreise in dem Umkreise, oder in dem Mittelpunkte, auf dem einfachen Bogen liegt; und umgekehrt.

2tes

*) W. §. 315.

2tes *Corollarium.*

In dem nehmlichen Kreise liegt der größte Winkel, er befinde sich im Mittelpunkte, oder im Umkreise, auf dem größten Bogen.

3tes *Corollarium.*

Der Winkel im Mittelpunkte, welcher ein rechter Winkel ist, liegt auf einem Bogen, der den vierten Theil der Kreislinie ausmacht.

4tes *Corollarium.*

Die Bogen, welche zwischen parallelen Sehnen enthalten sind, sind gleich; und umgekehrt (nach I, 4. und diesem Lehrsatze) *).

5tes *Corollarium.*

Aus dem Beweise dieses 4ten Lehrsatzes folgt, daß, wenn in einem und demselben Kreise zwo Sehnen gleich sind, es die Bogen, welche sie begränzen, ebenfalls seyn: der umgekehrte Fall erhellet eben so deutlich.

Eukl. 3, 28. 29. — *St.* 11ote S. 16te Pr. — W. §. 122. **)

1ste *Anmerk.* Auf dieses Corollarium gründet sich der Beweis für die Auflösung der 7ten Aufgabe

*) S. W. g. §. 312.

**) S. die angef. Ausg. §. 289.

gabe im 4ten Buch, und auf das 3te Corollarium gründet sich der Beweis der Auflösung von der 8ten und 9ten Aufgabe des gedachten Buchs.

6tes Corollarium.

Auch folgt hieraus, daß die Sehne eines größern Bogens größer, als die eines kleinern ist.

2*te Anmerkung.* Man kann nun die 9te Aufgabe im 3ten Buche auflösen.

5*ter Lehrsatz.* 42ste Fig.

Ein Winkel (ABD), *der in dem Halbkreise liegt, ist ein rechter; ein Winkel* (AGB), *der in einem kleinern Abschnitte liegt, ist größer als ein rechter; ein Winkel* (BAD), *der in einem größern Abschnitte liegt, ist kleiner als ein rechter Winkel.*

Eukl. 3. 31. — W. g. §§. 115. 116. *) *St. S.* 112. Pr. 18.

Construktion für den 1sten Theil. Es befinde sich der Durchmesser FCE auf dem Durchmesser AD senkrecht. Ziehe AF, FD; — *für den 2ten Theil.* Ziehe GD.

Beweis. Man beweisst 1stens; aus 1, 11, dass von den $<<$ AFC und GFD jeder ein halber rech-

*) §§. 317. 318. 319. der ang. Ausgab. von W. Geom.

rechter Winkel, und folglich nach dem 3ten Corollarium des 3ten Lehrſatzes, daſs <ABD=< AFD=< ſeyn.

2tens, weil der <AGB><AGD, und alle Winkel, welche auf AEB liegen, den <AGB gleich ſind;

3tens; weil <BAD<<ABD, und alle Winkel, wie z. B. BGD, auf BD liegen, dem < BAD gleich ſind.

1ſte Anmerkung. Es erhellet aus dem Corollarium der 4ten Erklärung, daſs man dieſen Lehrſatz auf folgende Art ausdrücken könnte:

„Ein Winkel in dem Umkreiſe iſt ein rech-
„ter Winkel, oder kleiner, oder gröſser als
„ein rechter Winkel, je nachdem er auf dem
„halben Umkreiſe, oder auf einem Bogen, der
„kleiner, oder auf einem Bogen liegt, der
„gröſser, als der halbe Umkreiſs iſt."

2te Anmerkung. Der Beweiſs des 1ſten Glieds von dieſem Lehrſatze wird leichter geführt, wenn man den Durchmeſſer AD als eine Linie, die den halben Umkreis, und folglich die Summe der Bogen AE und ED, oder in dieſem Falle, den doppelten Bogen AE begränzt, und folglich den Winkel ACE, der ein rechter Winkel iſt, als die Hälfte des Winkels betrachtet, welchen die Linien AC und CD machen; woraus vermöge des 3ten Lehrſatzes folgt, daſs <ABD=<ACE=< iſt.

3te

3te *Anmerkung.* Vermöge dieses 1sten Gliedes macht man die 2te Auflösung von der 4ten Aufgabe im 1sten Buche. Man kann jetzt auch die 5te, 6te, 8te, 26ste, 27ste Aufgaben des 3ten Buchs, und die 1ste (nehmlich derselben 2te Auflösung) im 4ten Buch auflösen. Bey allen diesen Aufgaben setzt man voraus, dass man wisse, der Winkel im Halbkreise sey ein rechter Winkel.

1stes Corollarium. 157ste Fig.

Wenn man von den Endpunkten A, *und* B *den Durchmesser nach zween oder mehreren Punkten* (D *und* E) *in dem Umkreise Linien* (AD AE *und* DB, *und* EB) *zieht; so werden die Summen der Vierecke auf den Linien, die man nach dem nehmlichen Punkte gezogen hat, immer unter einander gleich seyn* (2, 7.) *namentlich:*

□ auf AD + □ auf DB = □ auf AE + □ auf EB. Auch findet das Nehmliche Statt, wenn man auch die Linien nicht von den Endpunkten des Durchmessers, sondern von zween Punkten (I, K,) desselben, die vom Mittelpunkte gleich weit entfernt liegen, gezogen hat (2, 9. 2. und wegen der Gleichheit der Halbmesser), das heisst:
□ auf ID + □ KD = □ auf IE + □ auf KE.
Simpson Elem. of Geom. III. B. Pr. 20.

2tes Corollarium. Die nehmliche 157ste Fig.

Da alle Dreyecke in dem Halbkreise rechtwinklicht sind; so erhellet, daß alles, was sowohl in dem

8ten Lehrsatze des 2ten Buchs und dessen Corollarien als auch in dem 12ten Lehrsatze des 4ten Buchs und dessen Corollarien behauptet worden ist, von diesen Dreyecken im Halbkreise gilt; und folglich auch, wenn DO *und* EP *auf der Mittellinie senkrecht errichtet sind,*

□ auf AD = Recht. aus AB und AO;
□ auf AE = Recht. aus AB und AP;

folglich (nach 3, 1sten und 4ten Grundsatz)

□ auf AD : □ auf AE = AO : AP ist, das heisst: dass „die Quadrate der Sehnen in der nehmlichen Verhältniss der Theile des Durchmessers, aus „deren Endpunkten sie gezogen sind, sich befinden."

Viviani Divinatio de locis solidis pr. 9.

6ter Lehrsatz. 37ste Fig.

Wenn ein Durchmesser (BK) *eine Sehne* (LH) *in zween gleiche Theile theilt; so theilt er diese Sehne senkrecht, und umgekehrt: wenn ein Durchmesser* (BK) *auf einer Sehne* (LH) *senkrecht steht; so theilt er sie und den damit begränzten Bogen in zween gleiche Theile; zwo Sehnen aber* (BF, AE) *können einander niemals auf die Art theilen, daß sie beyde in zween gleiche Theile getheilt würden.*

Eukl. 3, 3. 4. — W. g. 125. *) — *St.* P. 91. Pr. 1. P. 92. 2tes Corollarium von dieser Pr.

Con-

*) in der ang. Ausg. §. 291.

Construktion für das 1ste Glied dieses Lehrsatzes. Ziehe LC, HC; *für sein 2tes Glied*: ziehe CG.

Beweis für das 1ste Gl. Mit 1, 11 und 8; oder mit 1, 12.

— — *für den umgekehrten Fall* mit 1, 11 und 8; oder mit 1, 11. 6.

— — *für das 2te Gl.* Wegen der Ungereimtheit des Gegentheils; denn alsdann müſsten so wohl < AGC als < BGC nach dem 1sten Gliede dieses Lehrsatzes rechte Winkel seyn. Dies ist aber unmöglich.

Corollarium.

Wenn eine Sehne auf eine andere Sehne senkrecht fällt, und sie zugleich in zween gleiche Theile theilt; so geht sie durch den Mittelpunkt, und ist ein Durchmesser *).

Anmerkung. Vermöge dieses Lehrsatzes kann man die 1ste (nehmlich ihre 1ste Auflösung), die 2te und die 10te Aufgabe des 4ten Buchs auflösen.

7ter Lehrsatz. 38ste Fig.

Eine gerade Linie (BD), *welche auf dem Endpunkte des Durchmessers senkrecht errichtet wird, fällt ganz*

*) W. g. in der ang. Ausg. Theor. 58. §. 292.

ganz ausserhalb des Kreises, und berührt den Kreis in diesem einzigen Punkte, namentlich in dem Endpunkte (B) *des Durchmessers; so daß man von diesem Punkte, zwischen dieser Berührungs-Linie* (BD) *und dem Umkreise keine Linie ziehen kann, welche den Kreis nicht schneide.*

Eukl. 3, 16. — *St.* SS. 101. 102. Pr. 9.

Beweis. Mit der Ungereimtheit des Gegentheils. Man zieht nehmlich aus dem Mittelpunkte die Linie CD zu dem Punkte D, worin man annimmt, daſs die Linie BD auch den Umkreis berühre, und welcher folglich zu dem Umkreis gehört, ſo daſs CD ein Halbmeſſer ſeyn müſste. Die Ungereimtheit erhellt aus dem 14ten Lehrſatze des 1ſten Buchs.

1stes Corollarium.

Eine Linie, die den Kreis berührt, berührt ihn in einem einzigen Punkte.

St. P. 102. 1ſtes Cor. der 9ten Pr.

1ste Anmerk. Man iſt nun im Stande, die 11te, 12te, 13te, 14te, 15te (nehmlich ihre 2te Aufl.) und 16te Aufgaben des 4ten Buchs aufzulöſen.

2te Anmerk. 43ſte Fig. Der Bogen HA neigt ſich gegen die Berührungslinie AB, und man kann dieſe Neigung von HA auf AB einen Winkel nennen, deſſen einer Schenkel eine gerade Linie, und der andere der Bogen eines Krei-

Kreises ist. Allein die Neigung eines Bogens von einem Kreise ist von der Neigung einer geraden Linie gegen eine andere gerade Linie ganz verschieden. Man kann also diese zween Winkel, wenn man sich an den blossen und ursprünglichen Begriff von dem, was eine Neigung ist, halten will, nicht mit einander vergleichen. Wenn man sagt, der Winkel zwischen dem Bogen DHA und der Linie AB sey kleiner, als irgend ein geradlinichter Winkel zwischen BA, und einer andern Linie, die man von dem Punkte A aus gezogen habe; so stellt man keine blosse Vergleichung zwischen der blossen Neigung, sondern zwischen dem Raume an, den diese Winkel einschliessen; folglich ist es sichtbar und wahr, dass nach der 162sten Fig. die krummlinichten Dreyecke GIE, GIL kleiner als die geradlinichten GIE, GIL sind. Allein ich habe bereits oben gesagt, dass der Begriff von Raum zum Begriff von Winkel nicht gehöre: 2te Anm. zu der 6ten Erklärung des 1sten Buchs. Man hat sehr viel über die Beschaffenheit des Winkels, den eine gerade Linie mit dem Bogen eines Kreises macht, gestritten; worüber man *Clavius* und *Taquet* zu *Euklids* 3, 16. und Wallis *Opera Mathematica*, *Tom*. II. p. 605. nachschlagen kann.

3te *Anmerk*. 158ste Fig. Man vergleicht vielleicht mit einer ähnlichen Nachlässigkeit geradlinichte Winkel mit solchen Winkeln, welche zween Bogen von Kreisen machen. Man sagt zum Beyspiel, wenn zween gleiche Kreise BAFD, und BKDEG einander schneiden, und man

man von einem der Schneidungspunkte B an einen der Kreise die Berührungslinie BF ziehe, und in denselben den Bogen BKDEG dem Bogen BAF, welchen die genannte Berührungslinie des andern Kreises abschneide, gleich mache, und endlich die Sehne BE ziehe, der krummlinichte Winkel FABKD dem geradlinichten Winkel FBG gleich sey; denn man sagt, dass der geradlinichte Winkel FABKD = FAB + FBKD; allein FAB = BKDEG; folglich FABKD = BKDEG + FBKD = < FBG.

Allein es erhellet, nach meinen Einsichten, ganz deutlich, dass man alsdann nicht, wie es hätte geschehen sollen, die blosse Neigung des Umkreises oder Bogens FAB gegen den Bogen BKD mit der Neigung der Linie FB gegen die Linie GB; sondern den Raum, der zwischen den Bogen FAB und BKD enthalten ist, mit dem Raume vergleicht, der zwischen den geraden Linien BG, BF, und den Bogen FD, DEG eingeschlossen ist. Es ist zwar auch wahr, dass, wenn man aus B auf den Bogen BA die Berührungslinie BI zieht, der geradlinichte Winkel IBF durch die zwo Berührungslinien gebildet wird; allein die Neigung von IB gegen BF kann mit der des Bogens FAB gegen den Bogen BKD nicht verglichen werden.

V. *Vieta* Opera. P. 382.

8*ter Lehrsatz.* 38ste Fig.

Eine Linie (CB), *welche vom Mittelpunkte* (C) *nach dem Berührungs-Punkte* (B) *einer geraden Linie*

nie (BD) gezogen wird, steht auf dieser Berührungs-Linie senkrecht; und umgekehrt: eine im Kreise liegende Linie, welche auf der Berührungslinie in dem Berührungspunkte senkrecht steht, geht durch den Mittelpunkt.

Eukl. 3, 16. Cor. und 18. 19. — St. 102 und 103te SS. 9ter Pr. 2tes und 3tes Coröll.

Beweis des 1sten Gliedes. Wegen der Ungereimtheit, wenn man annimmt, dass irgend eine andere Linie, z. B. CD, senkrecht sey. Diese Ungereimtheit erhellet aus I, 14.

Beweis des 2ten Gliedes. Wegen der Ungereimtheit, wenn man annimmt, dass irgend eine andere Linie BG durch den Mittelpunkt G gehe. Diese Ungereimtheit ergiebt sich aus dem 1sten Gliede.

9ter Lehrsatz. 43ste Fig.

Der Winkel (DAB *oder* DAF), *welchen die Berührungslinie* (AB *oder* AF) *mit der Sehne* (AD) *macht, die man aus dem Berührungspunkte* (A) *zieht, ist dem Winkel* (AED *oder* AHD) *gleich, der in dem verwechselten Kreis-Abschnitte* (DEA *oder* DHA) *welchen diese Sehne macht, sich befindet.*

Eukl. 3, 32. — *St.* 113te S. 20ste Pr.

Construktion. ECA sey ein Durchmesser, folglich ⊥ auf FAB. Ziehe ED und EH.

Beweis. Vermöge der Erwägung, dass < EDA (nach dem 5ten Lehrsatze) ein rechter Winkel ist;

ist; dass folglich auch < DEA, und < EAD zusammen, so wie < EAD, und < DAB ebenfalls zusammen ein rechter Winkel seyn.

Was den Winkel FAD betrift, vermöge der Erwägung, dass < FAD = < + < EAD; < EAD = < EHD (nach dem 4ten Lehrsatze); und < AHD = < + EHD.

Anmerk. Hierauf gründen sich die Auflösungen der 5ten und 6ten Aufgabe im 4ten Buch der Probleme.

10*ter Lehrsatz.* 39ste Fig.

Wenn man einen Punkt (A), *welcher nicht der Mittelpunkt* (C) *eines Kreises ist, innerhalb dieses Kreises annimmt, und von jenem Punkte nach dem Umkreise verschiedene Linien* (AB, AG, AD, AH, AE) *zieht; so haben folgende Wahrheiten Statt:*

1*stens; die größte Linie unter allen jenen gezogenen Linien ist diejenige* (AD), *welche durch den Mittelpunkt geht.*

2*tens; die kleinste unter ihnen ist das übrige Stück des Durchmessers* (AF).

3*tens; die Linien* (AG, AB *u. s. w.*) *sind desto kleiner, je weiter sie von dem Durchmesser oder dem Mittelpunkt entfernt sind.*

4*tens; Aus dem nehmlichen Punkte* (A) *kann man zwo und nicht mehrere gleiche Linien* (AG, AE)

 ziehen,

ziehen. Eine dieser Linien fällt an die eine, und die zwote an die andere Seite des Durchmessers. Sie machen auch mit dem Durchmesser gleiche Winkel (GAD und DAE), oder sie sind vom Mittelpunkte gleich weit entfernt.

5tens; Endlich finden alle diese Wahrheiten ebenfalls Statt (die 2te abgerechnet), wenn der Punkt A in den Umkreis fällt.

Eukl. 3, 7. — *St.* 93ste S. 3te Pr.

Construktion für das 1ste und 2te Glied dieses Lehrsatzes. Man ziehe die Halbmesser CG, CB, CE, CH.

Beweis. Mit der 14ten Erklärung und dem 14ten Lehrsatze im 1sten Buch.

Construktion für das 3te Glied. Ziehe CL ⊥ auf AG und CO auf AB.

Beweis. 1stens; für die ΔΔ ABC und ACG mit I, 17.; und sodann 2tens: mit I, 14., um zu zeigen, daß CN und folglich um so mehr CO > CL.

Construktion für das vierte Glied. Ziehe GIE ⊥ auf AD. Ziehe AE, und hierauf CM ⊥ auf AE.

Beweis. In den ΔΔ GAI und IAE ist ∠GAD = ∠DAE (nach dem 6ten Lehrsatze, der Construktion, und I, 8.) und sodann in ΔΔ CAM und CAL ist CM = CL; oder auch

Con-

Construktion. Mache <DAE = <DAG, und CM ⊥ auf AE.

Beweis. 1stens; mit 1, 13. AE = AG, und hierauf mit 1, 9. in den △△ ACM und ACL, CL = CM.

Es ergiebt sich aus dem 3ten Gliede, dass man keine andere Linie, als AE ziehen kann, welche AG gleich wäre.

Das 5te Glied erhellet von sich selbst.

Corollarium.

Wenn man aus irgend einem Punkte, innerhalb des Kreises, mehr als zwo einander gleiche Linie ziehen kann; so ist dieser Punkt der Mittelpunkt des Kreises.

Eukl. 3. 9. — *St.* 95ste S. Pr. 3. 2tes Cor.

11*ter Lehrsatz.* 40ste Fig.

Wenn man von einem Punkte ausserhalb des Cirkels irgend einige Linien nach dem Umkreise zieht; so werden folgende Sätze Statt finden:

1*ster S.: Diejenige Linie, welche durch den Mittelpunkt des Kreises geht,* (AG) *ist die längste unter allen jenen Linien, welche den Kreis schneiden, und innerhalb des Umkreises fallen. Die übrigen werden um so kürzer seyn, je größere Winkel sie mit dem Durchmesser machen, oder je weiter sie von dem Mittelpunkte entfernt sind.*

2ter S.; *diejenige von diesen Linien* (AL), *welche bey ihrer Verlängerung durch den Mittelpunkt geht, ist die kürzeste unter allen Linien, welche nur bis zum Umkreise laufen, und die übrigen werden um so länger seyn, je größer die Winkel, welche sie mit dem Durchmesser machen, oder je weiter sie vom Mittelpunkte entfernt seyn werden.*

3ter S.: *Man kann so wohl ausser- als innerhalb des Umkreises von einem und demselben Punkte* (A) *nur zwo einander gleiche Linien ziehen, und von diesen zwo gleichen Linien wird eine an die eine Seite des Durchmessers, und die andere an seine andere Seite fallen; auch werden sie von dem Mittelpunkte gleich weit entfernt seyn, oder gleiche Winkel mit dem Durchmesser machen.*

Eukl. 3, 8. — *St.* 95 u. 96ste SS. Pr. 4.

Construktion für den 1sten und 2ten Satz in diesem Lehrsatze. Ziehe die Halbmesser CK, CE, CP, CH, CD, CF, und CM ⊥ auf DA, CQ ⊥ auf FA.

Beweis. Nach der 14ten Erklärung und dem 15ten Lehrsatze des 1sten Buchs ist AG > FA; nach dem 17ten Lehrsatze des 1sten Buchs ist FA > DA; nach eben diesem 15ten Lehrsatze des genannten Buchs ist AL < AE; und nach dessen 16ten Lehrsatze AE < AK. Ferner ist nach seinem 14ten Lehrsatze CM > CQ.

Construktion für den 3ten Satz. Ziehe DH ⊥ auf AG, und hernach ziehe AH; auch ziehe CN ⊥ auf AH.

Beweis.

Beweis. In den ΔΔ DAO und OAH ist vermöge des 6ten Lehrsatzes und 1, 8. < GAD = < GAH, und HA = DA; und vermöge 1, 9. CN = CM.

Oder es giebt noch für das letztere eine andere Construktion und einen andern Beweis.

Diese Construktion ist: Nimm AH = AD; ziehe CH, und ziehe CN ⊥ auf AH.

Der Beweis. Vermöge 1, 12. ist in den ΔΔ DCA und HCA < DAG = GAH, und HA = DA, und folglich vermöge 1, 9. in den ΔΔ CAM und CAN, CN = CM.

1stes Corollarium.

Unter allen Sehnen, welche man in dem Kreise ziehen kann, ist der Durchmesser die größte.

Eukl. 3, 15. — *St.* 100ste S. Pr. 8.

1ste Anmerk. Dies kann man auch unmittelbar mit Hülfe der 14ten Erklärung, und des 15ten Lehrsatzes im 1sten Buche beweisen.

2te Anmerk. Man kann jetzt die 3te und 4te Aufgabe im 4ten Buche auflösen.

2tes Corollarium.

Die Sehnen, welche vom Mittelpunkte gleich weit entfernt liegen, sind gleich.

Eukl. 3, 14. — *St.* 99ste S. Pr. 7.

3*tes Corollarium.*

Unter allen Linien, welche man zu dem convexen Umkreise ziehen kann, ist die Berührungslinie die größte; allein sie ist die kleinste unter allen denjenigen, welche zu dem concaven Umkreise laufen.

4*tes Corollarium.*

Man kann aus irgend einem Punkte ausserhalb des Kreises immer zwo Berührungslinien zu diesem Kreise ziehen. Diese Berührungslinien werden einander gleich, und die größten unter allen jenen Linien diejenigen, welche man zu dem holen (concaven) Umkreise, die kleinsten aber unter allen seyn, welche man zu dem geschwollenen (convexen) Umkreise ziehen kann.

3*te Anmerk.* Eben dieses wird auch noch in dem 4ten Corollarium des 13ten Lehrsatzes auf eine andere Art dargethan werden. Man kann es auch unmittelbar mit Hülfe des 8ten Lehrsatzes in diesem Buche, und des 3ten Corollariums des 12ten Lehrsatzes im 1sten Buche beweisen.

5*tes Corollarium.*

Von einem Punkte ausserhalb des Kreises kann man nach dem Umkreise nur zwo einander gleiche Linien ziehen.

4te Anmerk. Wenn man diesen Lehrsatz mit dem vorhergehenden vergleicht; so wird man sehen, daſs sie in der That beide auf einen und eben denselben Lehrsatz hinauskommen, und daſs der ganze Unterschied nur in der Lage des Punktes A zu suchen ist.

12ter *Lehrsatz.* 74ste Fig.

Zwo Sehnen (AD, BE), *die sich in* (F) *irgend einem Punkte schneiden, schneiden sich immer so, daß das Rechteck aus den Theilen* (AF, FD) *einer Sehne dem Rechtecke aus den Theilen* (BF, FE) *der andern gleich ist.*

Eukl. 3, 35. — *St.* 116te und 117te SS. Pr. 23.

Erster Beweis. Er wird aus den Eigenschaften rechtwinklichter Dreyecke geführt.

Cönstruktion. Ziehe durch F und den Mittelpunkt C den Durchmesser NCG; hierauf CD und CH ⊥ auf AH.

Beweis. Vermöge des 6ten Lehrsatzes aus diesem Buche, und des. 2, 7. 4ten Corollariums ist in den △△ CDH und CFH.

□ auf CD — □ auf CF = □ auf HD — □ auf HF; woraus vermöge der Gleichheit der Halbmesser CD, CN, CG und des 5ten Lehrsatzes im 2ten Buche folgt, daſs das Rechteck aus NF und FG = dem Rechrecke aus AF und FD ist. Man beweiſst das Nehmliche in Rücksicht auf das Rechteck aus BF und BE; woraus der Lehrsatz erhellet.

Zweyter Beweis. Vermöge der ähnlichen Dreyecke.

Conſtruktion. Man zieht AB und DE.

Beweis. Vermöge des 3ten Corollariums aus dem 3ten Lehrſatze iſt △ ABF ∾ △ FDE, und folglich vermöge 4, 2.

AF : BF = FE : FD ;

und folglich vermöge 4, 7. 5.

Rechteck aus AF u. FD = Rechteck aus BF u. FE.

1ſte Anmerk. Wenn man dieſen Lehrſatz auf dieſe Art beweiſst; ſo giebt er uns zugleich einen Beweis von dem 8ten Lehrſatze im 4ten Buche.

2te Anmerk. Der Lehrſatz iſt allgemein; allein wenn in Rückſicht auf die Sehnen, die ſich ſchneiden, beſondere Falle eintreten; ſo wird man auch aus dem Lehrſatze einige beſondere Corollarien ableiten können; wie z. B. wenn ſich die Sehnen unter rechten Winkeln ſchneiden. In dieſem Falle iſt entweder eine von ihnen der Durchmeſſer, was den Gegenſtand des 3ten, 4ten und 5ten Corollariums darbietet, oder ſie ſind beyde Sehnen, welche über einander unter rechten Winkeln ſchneiden; dies iſt der Fall beym 6ten Corollarium.

1stes Corollarium.

Die Theile einer Sehne sind immer in zurückkehrender Verhältniß der Theile einer andern Sehne, welche jene erstere schneidet, d. h.

AF : BF = FE : FD.

3te Anmerk. Wenn man sich des ersten Beweises von diesem Lehrsatze bedient; so folgt dieses Corollarium vermöge 4, 7. 4. aus dem Lehrsatze. *)

Wenn man sich aber des zweyten Beweises bedient; so ist dieses Corollarium weniger ein Corollarium des Lehrsatzes, als der Ausdruck desjenigen Theils vom Beweise selbst, woraus man den Lehrsatz darthut.

2tes Corollarium.

Damit man einen Kreis durch vier gegebene Punkte A, B, D, E, *laufen lassen könne, müssen diese Punkte so gelegen seyn, daß sich die Linien, welche sie verbinden, in zurückkehrender Verhältniß schneiden, oder daß*

AF : BF = FE : FD.

4te Anmerk. Man kann also einen Kreis nicht immer durch vier gegebene Punkte gehen lassen. Dagegen ist dies in Rücksicht auf drey Punk-

*) Vergl. 4, 8. und die *1ste Anm.* zu diesem Lehrsatze.

Punkte möglich, wenn diese anders in keiner geraden Linie liegen, wie dies im 2ten Lehrsatze gezeigt worden ist.

3tes Corollarium. 75ste Fig.

Wenn man aus irgend einem Punkte (B) *des Umkreises eine Linie* (BF) *senkrecht auf den Durchmesser zieht; so wird das Quadrat dieser Linie dem Rechtecke aus den Theilen* (AF, FD,) *des Durchmessers gleich und diese Linie daher auch zwischen den genannten Theilen proportionell seyn,* (4, 7. 5.), *d. h.*

□ auf BF = Recht. aus AF, FD; und
AF : BF = BF : FD.

5te Anmerkung. Man kann diesen Satz unmittelbar mit Hülfe des 5ten Lehrsatzes aus diesem Buch, und des 8ten aus dem 4ten Buch beweisen.

6te Anmerkung. Hierauf beruhen die Auflösungen der 14ten, 18ten, 19ten, 20sten Aufgaben im 1sten Buche, die 3te Auflösung der 15ten, die der 19ten, und die des Corollariums von der 34sten Aufgabe im 3ten Buche.

7te Anmerkung. Wenn nun der Theil AF, den Theil FD, *m* mahl enthält, oder wenn AF = *m* x FD ist; so ist das □ auf BF = *m* x □ auf FD; und das □ auf BD = □ auf FB + □ auf FD = *m* □ auf FD + □ auf FD = $\overline{m + 1}$ x □ auf FD, d. h. das Quadrat auf der Sehne BD enthält das Quadrat von FD so vielmal, als

als es in dem Durchmesser AD, der FD gleiche Theile giebt.

4tes Corollarium.

Dieselbe Linie, welche nehmlich eine Lothlinie auf dem Durchmesser ist, hat immer die Eigenschaft, daß ihr Quadrat dem Unterschiede der Quadrate auf dem Halbmesser, und demjenigen Theile des Durchmessers, welcher zwischen dem Mittelpunkte und dieser Lothlinie liegt, gleich ist, d. h.

□ auf BF = □ auf CD — □ auf CF.

Mit dem vorhergehenden Corollarium, und 2, 5; wenn man in Erwägung zieht, daſs AF = CD + FC, und FD = CD — FC. Eben dieſen Satz kann man unmittelbar mit 2, 7. 1. beweiſen.

5tes Corollarium.

Die zwey vorhergehenden Corollarien, namentlich das eine: □ *auf* BF = *Rechteck aus* AF *und* FD, *und das andere:* □ *auf* BF = □ *auf* CD — □ *auf* CF, *sind auch in ihrem umgekehrten Falle wahr: wenn nehmlich irgend eine Linie* (ABD) *die Beschaffenheit hat, daß man für jeden Punkt in derselben* □ *auf* BF = *Rechteck aus* AF, *und* FD, *oder* = □ *auf* CD — □ *auf* CF *hat; so ist diese Linie der Umkreis eines Kreises, wovon* AD *der Durchmesser ist.*

Pappus, Coll. Math. VII., p. 165.

8*te Anmerkung.* Dies iſt der Satz, welchen die neuern Mathematiker die *Gleichung* (*Aequatio*)

tio) vom Kreise, oder von einer krummen Linie überhaupt nennen. Man heisst die Linie (AD), deren Lage gegeben ist, *Axe* oder *Durchmesser*. Man heisst den Punkt A oder C, von welchem an gerechnet man die Theile AF, oder CF der Durchmesser oder Axen, die man *abgeschnittene Theile* (*Abscissen*, *Abschnitte*) nennt, zu nehmen pflegt, den *Ursprung* der *abgeschnittenen Theile* (oder *Abscissen*,) und die Linien, wie z. B. B. F, nennt man die *angewandte* Linien (ordinatae applicatae).

Die krumme Linie ist daher bestimmt, so bald man die Beziehung kennt, die beständig zwischen den abgeschnittenen Theilen und den angewandten Linien Statt findet. In Rücksicht auf den Kreis wird diese Beziehung auf folgende Art ausgedrückt:

□ auf BF = Rechteck aus AF, FD, oder =
= Rechteck aus AD, FD — □ auf FD.

Wenn man nun BF, y; FD, x, AD = 2a heisst, und auf die Bemerkungen Rücksicht nimmt, die in IV, 7. 8. und in der 10ten Anmerkung gegeben worden sind; so ist $y^2 = (2a - x)\, x = 2ax - x^2$ die Gleichung, wodurch die Eigenschaft der Kreise angegeben wird; oder auch, wenn man CF = x annimmt, das heisst, wenn man die *abgeschnittenen Theile* (*Abscissen*), nicht von dem Endpunkte des Durchmessers, sondern vom Mittelpunkte annimmt; so ist $y^2 = a^2 - x^2 = (a + x)(a - x)$ die Gleichung des Kreises.

Ich

Ich habe in der 9ten Anmerkung zu dem 7ten Lehrsatze des 4ten Buchs angezeigt, was die Alten unter *Flächen-Oertern* oder *Flächen-Aufgaben* verstehen. Es sind nehmlich diejegen Aufgaben, in welchen die verlangte Zahl so wohl im Quadrate, als im Produkte aus ihr und einer andern, allein *gegebenen* Zahl vorkömmt. Sie lösen sie vermöge des dritten und vierten Corollariums geometrisch auf. Man kann auch in der That alle jene Aufgaben, oder wie man nun sagt, alle jene *Gleichungen vom zweyten Grade* auf folgende zwo zurückführen: I. $x^2 \pm ax = b^2$; II. $x^2 \pm ax = -b^2$.

Was die 1ste Gleichung betrift; so nimm (in der 60sten Fig. der 7ten Taf.) $GL = \frac{1}{2}a$, $IG = b$ auf DL senkrecht. Beschreibe aus L als dem Mittelpunkte mit dem Halbmesser LI den Kreis DIKF, der die verlängerte Linie LG in D und F schneidet; so bezeichnet die Linie DG die Zahl x, wodurch die Gleichung $x^2 + ax = b^2$, und die Linie GF die Zahl x, wodurch die Gleichung $x^2 - ax = b^2$ aufgelöst werden kann.

Es sey ferner $HF = DG$; so ist $DG = HF$, $GF - GH$, $GF - a$; denn $DL = \frac{1}{2}a + DG$; $DF = a + 2DG$; $GF = DF - DG = a + DG$.

Wenn man nun im 3ten Corollarium anstatt der Quadrate sich der zwoten Machten, und statt der Rechtecke des Multiplicationszeichens bedient,

dient, (welches erlaubt ist, wie ich dies im 8ten Coroll. No. 1. und der 10ten Anmerkung zu dem 7ten Lehrsatze im 4ten Buche gezeigt habe); so ist

$$\overline{IG}^2 = DG \times GD = DG \times (a + DG) = \overline{DG}^2 + a \times DG = b^2,$$

und

$$\overline{IG} = DG \times GF = GF \times (GF - a) = GF^2 - a \times GF = b^2.$$

In Rücksicht auf die 2te Gleichung nimm (nach der 15ten Fig. auf der 6ten Tafel) $AE = \frac{1}{2}a$; beschreibe mit AE aus E den Kreis ADB, nimm $AC = b$ senkrecht auf AB; es sey CD || AB, und DF ⊥ auf AB; folglich ist $EB = -\frac{1}{2}a$; $DF = CA = b$; folglich $\overline{FE}^2 = \overline{DE}^2 - \overline{DF}^2 = \frac{1}{4}a^2 - b^2$, und $FE = \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2} = EG$; folglich $BF = EF + EB = -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}$;

woraus folgt:

1stens; $\sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2} = BF + \frac{1}{2}a$, und folglich $\frac{1}{4}a^2 - b^2 = \frac{1}{4}a^2 + a \times BF + \overline{BF}^2$;

oder $\overline{BF}^2 + a \times BF = - b^2$;

und folglich thut BF der Zahl x Genüge, wodurch die Gleichung $x^2 + ax = - b^2$ aufgelöst werden kann.

2tens; $AF = AE - FE = \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}$, und folglich

$$\sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2} = \frac{1}{2}a - AF, \text{ und folglich}$$

$$\frac{1}{4}a^2 - b^2 = \overline{AF}^2 - a \times AF + \frac{1}{4}a^2;$$

und folglich $\overline{AF}^2 - a \times AF = - b^2$.

Folg-

Folglich thut AF der Zahl x Genüge, wodurch die Gleichung $x^2 - ax = - b$ aufgelöst werden kann.

Diesen letztern Satz kann man noch kürzer beweisen; denn es ist

$\overline{DF}^2 = AF \times FB$ (3tes Corollarium); folglich
$\overline{DF}^2 = AF(AB - AF) = AF \times AB - \overline{AF}^2$; oder
$$\overline{AF}^2 - a \times AF = - \overline{DF}^2$$

Man sieht also, daſs zur Auflöſsung dieser Gleichungen vermittelst der Meſskunde nichts anders erfordert wird, als daſs eine Linie eine Zahl $\frac{1}{2}a$, und eine andere Linie die Wurzel *b* aus einer Zahl b^2 ausdrücke, welche man als eine Quadrat-Zahl ansieht, sie mag nun meſsbar oder unmeſsbar seyn. Jenes springt in die Augen, dieses ebenfalls, wenn b^2 eine Quadratzahl ist; wenn nicht; so kann man b^2 als ein Produkt aus zwo Zahlen *m* und *l* betrachten, indem man für eine derselben, wenn es nöthig ist, die Einheit setzt. Diese Zahlen *m* und *l* kann man durch Linien ausdrücken, und die mittlere Proportional-Linie zwischen denselben ist sodann die gesuchte Linie *b*.

Herr *König* führt diese Sätze auf die 28ste und 29ste Proposition des 6ten Buchs von *Euklid* zurük.

Man verlangt auch in der That, da man hier x finden muſs, daſs man längst der Linie a, ein Rechteck $(a \pm x)\, x$ beschreiben solle, das

dem gegebenen Rechtecke b^2 gleich, und dessen Grundlinie ($a \pm x$) grösser oder kleiner als die gegebene Linie a seyn. Darauf laufen die genannte Sätze von *Euklid* hinaus.

6tes Corollarium. 159ste Fig.

Wenn zwo Sehnen sich unter rechten Winkeln schneiden; so wird die Summe der Quadrate von den Theilen (□ *auf* AF + □ *auf* BF + □ FD + □ *auf* FE) *dem Quadrate des Durchmessers gleich seyn.*

10te *Anmerkung.* Man kann diesen Satz auf verschiedene Art beweisen.

1*stens*; als ein Corollarium von diesem Lehrsatze auf folgende Art: ziehe BD, DE, hierauf BI durch den Mittelpunkt C, und endlich BA, AI, ID; nach dem Lehrsatze ist,

AF : BF = FE : FD; folglich

□ auf AF : □ auf BF = □ auf FE : □ auf FD;

woraus vermöge der Zusammenzählung, Verwechslung, und noch einmahl vermöge der Zusammenzählung der Verhältnisse folgt:

□ auf AF + □ auf BF + □ auf FE + □ auf FD : □ auf FE + □ auf FD = □ auf BF + □ FD : □ auf FD; oder (2, 7.)

□ auf AF + □ auf BF + □ auf FE + □ auf FD : □ auf ED = □ auf BF : □ auf FD.

Allein △ FDE ∾ △ IBD; denn

<FED = <BID (5, 3. 3tes Cor.)

und <EFD = <BDI = ∟ (5, 5.); folglich (4, 16.)

□ auf

□ auf BD : □ auf FD = □ auf BI : □ auf FD; und folglich (3, 4ter Grundsatz) □ auf BI = □ auf AF + □ auf BF + □ auf FE + □ auf FD.

2tens; Man kann dieses Corollarium auch vermittelst des *Pythagorischen* Lehrsatzes (2, 7.) beweisen. Man zieht in diesem Falle CB, CD, CE, CA, und die Lothlinien CL, CM. Man nimmt in den △△ BCL, ECL, ACM, und MCD, die Werthe der Quadrate auf CB, CD, CE, CA vermöge 2, 7. Die Summe dieser vier Quadrate ist = 4 □ auf CB = □ auf BI; und wenn man die Summe der nach 2, 7. gefundenen Werthe nach 2, 2. u. s. w. entwickelt; so findet man = □ auf AF + □ auf BF + □ auf FE + □ auf FD.

3tens; Man kann es auch beweisen, wenn man erwägt, daſs, da < ABE + < BAF = L, die Bogen AE + BD (nach dem 2ten Corollarium des 3ten Lehrsatzes) den halben Umkreis ausmachen. Dies letztere erhellet auch für AB + ED. Folglich ist der Bog AI = Bog. ED; allein < BAI = L (5ter Lehrsatz); folglich (2, 7.) □ auf BI = □ auf AB + □ auf AI = □ auf AB + □ auf ED; woraus vermittelst 2, 7. der Lehrsatz folgt.

7tes *Corollarium*. 88ste Fig.

Wenn eine Linie (BI) *in irgend einem Dreyecke* (EBF) *einen der Winkel* (EBF) *in zween gleiche Theile* (EBI, IBF) *theilt, und die gegenüberliegen-*

de Seite (EF) *schneidet; so wird das Quadrat dieser Linie* (BI) *nebst dem Rechteck der Theile* (EI, FI) *der genannten Linie* EF *dem Rechteck der zwo übrigen Seiten gleich seyn.*

Beweis. Man nehme an, das △ EBF liege in einem Kreise (2ter Lehrsatz) BI sey die gegebene Linie, welche ∠ EBA = ∠ ABF mache. Man nimmt nach dem gegenwärtigen Lehrsatze an, daſs das Rechteck aus AI und IB = Rechteck aus EI und IF sey, und beweist mit dem 1sten Cor. des 3ten Lehrsatzes *), daſs △ EIB ∾ △ ABF, und folglich mit 4, 2. hierauf mit 4, 7. 5. und 2, 1. 5., daſs *Recht.* aus BE, BF = Recht. aus EI, IF + □ BI sey.

11*te Anmerkung.* Dieser Satz ist bereits, zwar vermittelst anderer Sätze in dem 9ten Lehrsatze des 4ten Buchs bewiesen worden.

13*ter Lehrsatz.* 40ste Fig.

Wenn zwo oder mehrere aus einem Punkte (A) *ausserhalb des Kreises an desselben Umkreis gezogene Linien* (AD, AF, AG, u. s. w.) *diesen Umkreis in ihrer Verlängerung schneiden; so sind die Rechtecke aus jeder ganzen Linie und ihrem Theile, welcher ausserhalb des Kreises fällt* (*aus* AD *und* AK, *aus* AF *und* AE *u. s. w.*) *immer einander gleich.*

St. 119te S. 1stes Cor.

Erster

*) Ich möchte es vielmehr mit dem 3ten Cor. des 5ten Lehrs. u. 1. 7. beweisen.

Erster Beweis. Vermöge der Eigenschaften rechtwinklichter Dreyecke.

Construktion. Man zieht die Halbmesser CD, CF, und sodann CM ⊥ auf AD, und CQ ⊥ auf AF.

Beweis. In den rechtwinklichten Dreyecken CAQ und CAM *) ist (vermöge 2, 7. 4.) □ auf AQ — □ auf QE = □ auf AM — □ auf MK; woraus man vermöge des 6ten Lehrsatzes in diesem Buche und 2, 5. das Resultat zieht.

Zweiter Beweis. Vermöge der Aehnlichkeit von Dreyecken.

Censtruktion. Ziehe FD und EK.

Beweis, Man zeigt, daſs △AFD ∾ △AEK, indem < DAF in beyden Dreyecken gemeinschaftlich, < FDK + < FEK = 2 L (3. 2tes Corollarium) = < FEK + < KEA; und folglich < FDK = < KEA ist; woraus (4, 3.) folgt, daſs AD : AF = AE : AK, und hieraus ergiebt sich (4, 7. 5.) der Lehrsatz.

1ste Anmerkung. Es erhellet deutlich, daſs dieser und der vorhergehende Lehrsatz einen und denselben Lehrsatz ausmachen, welchen man auf folgende Art allgemeiner würde ausdrücken können.

 „Wenn

*) Nicht vielmehr CAD und CAF?

„Wenn man zwo Linien zieht, welche in„nerhalb oder ausserhalb des Kreises schneiden;“ „so sind die Rechtecke der Theile von jeder „Linie, welche sich zwischen dem Punkte, „worin die Linien einander schneiden, und den „beyden Punkten liegen, worin jede Linie den „Umkreis schneidet, einander gleich.“

1stes Corollarium.

Die Schneidungs-Linien werden von dem Kreise in umgekehrter Verhältnis geschnitten, dies heist

AF:AD=AK:AE.

2te Anmerkung. Bedient man sich des ersten Beweises; so folgt dieses Corollarium vermöge 4, 7. 5. aus dem Lehrsatze. Bedient man sich aber des zweyten Beweises; so ist es nicht sowohl ein Corollarium, als ein Ausdruck in Worten von demjenigen Theile des Beweises, woraus man den Lehrsatz erweist.

2tes Corollarium.

Zieht man aus einem Punkte (A) *ausserhalb des Kreises nach Belieben eine Berührungs- und eine Schneidungs-Linie; so ist das Quadrat auf der Berührungs-Linie* (AB) *immer dem Rechtecke aus der Schneidungs-Linie* (AF) *und ihrem Theile gleich, der ausserhalb des Kreises liegt* (AE); *und umgekehrt.*

Euklid 3, 36. 37. — *St.* SS. 118. 119. Pr. 24.

3te *Anmerkung.* Ich sehe diesen Satz als ein unmittelbares Corollarium aus diesem 13ten Lehrsatze an; denn wird D A eine Berührungs-Linie; so fällt der Punkt K auf B; folglich D A = K A und Rechteck aus D A, K A = □ auf B A. Die andern Shhriftsteller, wie zum Beyspiel *Euklid*, machen dieses Corollarium zum Haupt-Lehrsatze, und diesen 13ten Lehrsatz zu einem Corollarium. Alsdann beweist man es entweder aus den Eigenschaften rechtwinklichter Dreyecke, oder aus der Aehnlichkeit der Dreyecke. Im ersten Falle ist vermöge 2, 7. 1. □ AB = □ AC − □ CB = □ AC − □ CG = Recht. aus AG und AL; und nun führt man den Beweis wie für den obigen Lehrsatz. Im zweyten Falle schliesst man nach 4, 2. und 4, 7. 5. aus der Aehnlichkeit der Dreyecke (164ste Fig.) AEB und FAB; denn sie haben beyde den < A gemeinschaftlich; und vermöge des 9ten Lehrsatzes von diesem Buche ist < EBA = < BFE.

4te *Anmerk.* Hierauf beruhet die Auflösung der 13ten Aufgabe im 1sten Buch, wie auch der Beweis der 1sten Auflösung von der 10ten Aufgabe des 3ten Buchs.

3tes *Corollarium.*

Die Berührungslinie ist die mittlere Proportional-Linie zwischen der Schneidungs-Linie, und ihrem Theile, der ausserhalb des Kreises liegt.

Vermöge des 2ten Corollariums, und 4, 7. 5.

4tes Corollarium.

Die zwo Berührungs-Linien, die man aus einem Punkte an den Kreise ziehen kann, sind einander gleich.

5te Anmerk. Dieser Satz ist schon im 4ten Corollarium des 11ten Lehrsatzes gezeigt worden.

5tes Corollarium. 40ste Fig.

Wenn der äussere Theil (AK) einer der Linien (AD) zwischen den zween Theilen einer andern von ihnen (AH) mittlere Proportional-Linie ist; so wird auch der äussere Theil (PA) dieser andern Linie zwischen den zween Theilen der erstern Linie mittlere Proportional-Linie seyn;

Denn wenn AP : AK = AK : HP, und da
AP : AK = DA : AH; so ist
DA : AH = AK : HP; und folglich
DA — AK : DA = AH — HP : AH, oder
DK : PA = DA : AH, und folglich
DK : PA = PA : AK.

Vieta Operum. p. 242.

6tes Corollarium. 160ste Fig.

Sind die zwo Linien dergestalt gezogen, daß der äussere Theil der erstern sich zu ihrem innern Theile, wie der innere Theil der zwoten von diesen Linien zu ihrem äussern Theil verhält; so werden die äussern Theile jener ersten und zwoten Linie zwischen den innern Theilen der zwoten und erstern zwo mittlere Proportio-

portional-Größen seyn, denn nach der Voraussetzung ist

DK : AK = AP : HP, oder
DK : AP = AK : HP; folglich
DK : AD = AP : AH, und *)
AD : AH = AP : AK; folglich
DK : AP = AP : AK = AK : HP,
oder ∺ DK, AP, AK, HP.

6te Anmerk. Wenn man also in den Kreis zwo Linien unter dieser Bedingung geometrischer Weise ziehen könnte, daſs DK : AK = AP : HP wäre; so wäre die Aufgabe, nach welcher man zwo mittlere Proportional-Linien ziehen solle, geometrisch aufgelöst. Auf diese Frage brachte *Vieta* die Aufgabe. Allein man kann jener Frage nicht Genüge thun. Man kann sie zwar auf eine einfache Auflösung zurückführen, nehmlich auf folgende Art: (Man bediene sich noch immer der 160sten Figur,) Beschreibe einen Kreis, dessen Durchmesser eine der gegebenen Linien sey: ziehe die andere (die kleinste) HP in dem Kreise. Verlängere sie, so daſs HL = HP. Ziehe sodann PI || LC. Ziehe endlich durch den Mittelpunkt C die Linie DCKA, so daſs AG = KC werde. So ist

AG : AP = GC . PL;
nun ist AG = ½ KD, wie auch PH = ½ PL;

 folg-

*) Ich würde lieber noch sagen: „und AD : AH = DK : AP," sodann „AD : AH = AP : AK (nach dem Lehrsatze)."

folglich AG : KD = PH : PL; und folglich
KD : AP = GC : PH;
allein AG = KC; folglich GC = AK; folglich
KD : AP = AK : PH, oder
KD : AK = AP : PH, und folglich
∺ KD, AK, AP, PH; allein man kann die Linie DCKA nicht geometrisch ziehen, so dass AG = KC wäre.

Vieta p. 243.

7tes Corollarium. 161ste Fig.

Wenn der Winkel ABC *ein rechter Winkel ist, und man das Rechteck* ADCB *vollendet, ferner durch* D *und* A, *und durch* D *und* C *die Linien* DCG *und* DAF, *und endlich aus* B *die Schneidungs - Linie* GBOF *auf diese Art zieht, daß* BG = OF *sey; so werden* AF *und* GC *zwischen* AB *und* BC *zwo mittlere Proportional - Linien seyn;*

Denn da OF = BG; so ist OG = BF,
und folglich Recht. FD, AF = Recht. BF, FO = Recht. OG, BG = Recht. GD, GC,

und folglich 1stens; GD : FD = AF : GC; nun ist (4, 2.)
GD : FD = AB : FA; folglich

2tens; AB : FA = FA : GC;

3tens; GD — AB : GD = FD — FA : FD, oder
GC : GD = BC : FD, oder

4tens; GC : BC = GD : FD = FA : GC;

folg-

folglich nach NN. 2. 4.

AB : FA = FA : GC = GC : BC, und folglich ∺ AB, FA, GC, BC.

Wenn man alſo, nachdem man AB auf BC ſenkrecht errichtet, und durch die Punkte A, B, C, einen Kreis gezogen, das Rechteck ABCD vollendet, und DA und DC verlängert hätte, die Linie GBF unter der Bedingung durch den Punkt B ziehen könnte, daſs BG = FO wäre: ſo wäre die Aufgabe von zwo mittlern Proportional-Linien aufgelöst. Auf dieſe Frage brachte *Philo* von Byzanz die genannte Aufgabe. S. Tacquet zu Eukl. 6, 13.

2te Abtheilung.

Ueber die Kreiſe, welche einander berühren oder ſchneiden.

14ter *Lehrſatz.*

Kreiſe, welche einander berühren oder ſchneiden, haben nicht einerley Mittelpunkt.

Eucl. 3. 5. 6.

Allgemeine Anmerkung. Dieſer und die drey folgenden Lehrſätze beruhen auf der Grundlehre, daſs zween Kreiſe, welche einander berühren oder ſchneiden, gerade ſo viele gemeinſchaftliche Punkte haben, als es Punkte giebt,

in

in welchen sie sich berühren oder schneiden; folglich dass die Linien, welche man aus diesen Punkten nach ihrem besondern Mittelpunkte zieht, gleich seyn werden.

Beweis. Siehe in Rücksicht auf die Kreise, die einander schneiden, die 44ste Fig., in Rücksicht der Kreise, die einander innerhalb berühren, die 45ste Fig., in Rücksicht der Kreise, welche einander ausserhalb berühren, die 46ste Fig. Was diese letztern betrift; so redet die Sache von selbst, da einer von den beyden Kreisen ganz ausserhalb des andern fällt. In den zween erstern Fällen wird der Beweis aus der Ungereimtheit von der Annahme des Gegentheils geführt. Diese Ungereimtheit aber erhellet aus der Gleichheit der Halbmesser.

15*ter Lehrsatz.*

Wenn zween Kreise einander innerhalb oder ausserhalb berühren; so geht die Linie, welche durch beyde Mittelpunkte läuft, auch durch den Berührungspunkt.

Eukl. 3, 11. 12.

Beweis. Für beyde Fälle vermöge der Ungereimtheit des Gegentheils. Berühren die Kreise einander innerhalb (s. die 45ste Fig.) und der Lehrsatz habe nicht Statt; so sey I der Mittelpunkt des Kreises ADE auf der Seite von FA. Ziehe AI. In diesem Falle müsste (1, 15.) DF > FB sey, welches unmöglich ist. Kommt die Berührung von aussen (s.

(s. die 46ste Fig.); so sey A ausserhalb der Linie CF, welche die Mittelpunkte verbindet; in diesem Falle müsste (1, 15.) CD + BF > CF seyn; welches ebenfalls unmöglich ist.

Anmerkung. Man kann nun das 17te, 18te und 19te Problem im 4ten Buch der Aufgaben auflösen.

16ter *Lehrsatz.*

Ein Kreis berührt einen andern Kreis nur in einem Punkte.

Eukl. 3, 13. — St. 98ste S. 6te Pr.

Beweis. Für beyde Fälle aus der Ungereimtheit des Gegentheils. Findet die Berührung innerhalb Statt (s. die 45ste Fig.); so seyn B und A die zween Berührungspunkte, und (nach dem 7ten Lehrsatze) F und C die zween Mittelpunkte. In diesem Falle müsste FB = FC + CB seyn, welches (nach 1, 15.) unmöglich ist. Findet die Berührung ausserhalb Statt (s. die 46ste Fig.); so seyn A und D die zween Berührungspunkte. In diesem Falle müsste CA + AF = CD + DF seyn; welches (nach 1, 15.) unmöglich ist.

17ter *Lehrsatz.*

Zween Kreise, welche einander schneiden, schneiden sich in zween Punkten. Diese Punkte sind so beschaffen, daß die Linie, welche sie verbindet,

auf

auf der Linie, welche durch die Mittelpunkte der beyden Kreise läuft, senkrecht steht, und von dieser in zween gleiche Theile getheilt wird. Sie können einander auch in nicht mehr als zween Punkten schneiden.

Eukl. 3. 10. — St. 97ste S. der 4ten Pr. 2tes Cor.

Beweis vom 1sten Theil des Lehrsatzes. S. die 48ste Fig. Wenn die beyden Kreise blos *einen* gemeinschaftlichen Punkt hätten; so würden sie sich nur berühren. Folglich, da sie sich schneiden; so schneiden sie sich wenigstens in zween Punkten.

Diese Punkte können sich nicht auf der nehmlichen Seite von derjenigen Linie befinden, welche die beyden Mittelpunkte verbindet; denn in diesem Falle würde man an einer und der nehmlichen Seite aus einem andern als dem Mittel-Punkte zwo gleiche Linien ziehen können; welches unmöglich ist (nach dem Corollarium des 8ten, und dem 5ten Corollarium des 9ten Lehrsatzes. *)

Diese Punkte A, F, werden also auf die zwo verschiedene Seiten fallen, und hieraus ergiebt sich nach 1, 11, 5. der Lehrsatz.

Beweis.

*) Ich vermuthe, es sollte heissen: „nach dem 4ten Gliede „des 10ten Lehrsatzes und dem 3ten Gliede des 11ten „Lehrsatzes;" oder vielleicht besser: „nach dem Cor. „des 10ten Lehrsatzes und dem 5ten Cor. des 11ten Lehr„satzes."

Beweis von seinem 2ten Theile. S. die 47ste Fig. Wegen der Ungereimtheit bey der Voraussetzung des Gegentheils; denn in diesem Falle müssten die beyden Kreise einerley Mittelpunkt haben *); welches unmöglich ist (nach dem 14ten Lehrsatze.)

*) S. den 2ten Lehrsatz.

Sechs-

Sechstes Buch.

Ueber die in und um den Kreis beschriebenen Vielecke.

1ste Abtheilung.

Eigenschaften der Vielecke, die man in uud um den Kreis beschreibt.

Erklärungen.

1ste;

Man sagt von einer Figur, daß sie sich in einer andern befinde, oder daß sie in sie beschrieben sey, wenn die Spitzen ihrer Winkel auf den Seiten dieser andern Figur liegen.

Man

Man sagt daher von einer Figur, daß sie sich in dem Kreise befinde, oder in ihm beschrieben sey, wenn die Spitzen ihrer Winkel auf dem Umkreise liegen: und man sagt von Kreise, daß er in einer Figur beschrieben sey, wenn sein Umkreis alle Seiten jener Figur berührt.

Eukl. 4, 1ste; 3te; 5te Erkll. — *St.* 122ste S. Deff. 1. 2.

1ste Anmerkung. Wir werden in dem 19ten Lehrsatze sehen, wie man in ein regelmäsiges Vieleck ein anderes reguläres (regelmäsiges) beschreiben müsse?

2te Anmerkung. Nach demjenigen, was in dem 18ten Lehrsatze des 2ten Buchs erwiessen worden ist, kann man (s. die 143ste Fig.) in ein Vieleck so viele andere ähnliche Vielecke beschreiben, als man will. Sie werden aber alle von verschiedener Grösse seyn. Allein wenn die Rede von einem in ein anderes Vieleck beschriebenen Vielecke ist; so muss die Rede von einem Vielecke seyn, das eine bestimmte Grösse hat. Nun haben wir in dem Corollarium des 17ten Lehrsatzes vom 4ten Buche gesehen, dass dies Statt habe, wenn di Spitzen E, F, G, I, L mitten auf den Seiten AD, DC, CB, BQ, QA liegen. Daher kann man auch vorzugsweise dieses Vieleck das in dem anderen Vieleck beschriebene Vieleck heissen.

2te;

Man sagt von einer Figur, daß sie um eine andere Figur herum gelegt, oder beschrieben sey, wenn alle ihre Seiten die Spitzen aller Winkel dieser andern Figur berühren. Man sagt daher von einem Kreise, daß er um eine Figur beschrieben, oder um dieselbe herum gelegt sey, wenn ein Umkreis vom Kreise die Spitzen aller Winkel dieser Figur berührt: und man sagt von einer Figur, daß sie um den Kreis beschrieben sey, wenn alle ihre Seiten des Kreises Umkreis berühren.

Eukl. 4. 2te; 4te; 6te Erkl. — St. 122ste S. Deff. 1. 2.

Anmerkung. Wir werden in dem 1sten Corollarium des 21sten Lehrsatzes sehen, unter welcher Bedingung, und wie man um ein regelmäsiges Vieleck ein anderes regelmäsiges Vieleck beschreiben könne?

Grundsatz.

Man kann kein Vieleck weder in ein anderes, noch um ein anderes Vieleck beschreiben, es sey denn, dieses andere Vieleck habe gleich viele Seiten.

1ster Lehrsatz. 77ste Fig. *)

Man kann keine Figur in einen Kreis beschreiben, es gebe denn innerhalb oder ausserhalb derselben irgend einen

*) Die Figur ist zwar nur für einen Fall zu gebrauchen, die andern Fälle aber sind leicht durch andere Figuren vorzustellen.

einen Punkt von der Art, daß alle Linien, die man von diesem Punkte aus nach den Winkeln der Figur zieht (CB, CD, CA) *einander gleich seyn.*

Beweis. Vermöge der 1sten Erkl. und der Natur des Kreises.

2ter Lehrsatz 78ste Fig.

Man kann um keine Figur einen Kreis beschreiben, es gebe denn in derselben einen solchen Punkt, daß die Lothlinien, welche man von jenem Punkte auf alle Seiten der Figur ziehet (CI, CK, CL) *einander gleich sind.*

Beweis. Nach der 2ten Erklärung, und 5, 7.

3ter Lehrsatz.

Man kann um keine Figur einen Kreis beschreiben, es sey denn, (wenn die Zahl ihrer Seiten gerade ist), die Summe der ersten, dritten, fünften, siebenten Seite, u. s. w. der Summe der zwoten, vierten, sechsten, achten Seite, u. s. w. gleich, oder es sey denn, (wenn die Figur eine ungerade Zahl Seiten hat), die Summe der ersten, dritten, fünften, siebenten Seite u. s. w. der Summe der zwoten, vierten, sechsten, achten Seite u. s. w. nebst dem doppelten Stücke der letztern Seite gleich, welches zwischen der erstern Seite und dem Berührungspunkte liegt.

Pitot *Mem. de l'Acad. de Paris.* Ann. 1725. p. 45.

Beweis. Nach der 2ten Erklärung, und 5, 11. 4.

4ter Lehrsatz.

Es giebt kein Dreyeck, welches nicht in oder um einen Kreis, und folglich kein Dreyeck, um welches oder in welchem nicht ein Kreis beschrieben werden könnte.

Des Beweises 1ster Theil. Die Beschreibung des Dreyecks in den Kreis, und folglich die Beschreibung des Kreises um das Dreyeck erhellet aus 5, 2.

Des Beweises 2ter Theil, worin die Beschreibung des Dreyecks um den Kreis darzuthun ist.

Construktion. 78ste Fig. Nimm an, die Linien BC und CD, welche die Winkel ABD und ADB in zween gleiche Theile theilen, treffen in C zusammen. Ziehe CA, und die Lothlinien CI, CK, CL. Man muss beweisen (s. den 2ten Lehrsatz), dass CI = CK = CL.

Beweis. Nach 1, 9.

Corollarium.

Die Construktion und der Beweis des 2ten Theils von diesem Lehrsatze geben die folgende Eigenschaft der Dreyecke an:

Die Linien, welche die Winkel eines Dreyecks in gleiche Theile theilen, treffen in einem Punkte innerhalb des Dreyecks zusammen, und alle die Lothlinien, die man aus diesem Punkte auf die Seiten des Dreyecks zieht, sind einander gleich.

L. C.

L. C. §. 502.

1ste Anmerkung. Das Dreyeck ist die einzige Figur, die man immer in und um den Kreis, und in und um welche man immer einen Kreis beschreiben kann.

2te Anmerkung. Man kann nun die 1ste, 2te, 3te, 4te und 5te Aufgabe des 5ten Buchs auflösen.

5ter Lehrsatz. 79ste, 80ste Figg.

Man kann zwar nicht alle unregelmäsige, allein man kann alle regelmäsige Vielecke in und um den Kreis beschreiben.

L, C. §. 530.

Beweis des 1sten Theils: Mit dem 1sten und 2ten Lehrsatze.

— d. 2ten Theils: Mit dem 1sten und 2ten Lehrsatze, und 2, 14.

1ste Anmerkung. Der 1ste und 2te Lehrsatz aus *diesem* Buche in Verbindung mit dem 14ten Lehrsatze des 2ten Buchs geben vollkommen an, wie man in und um ein gegebenes regelmäsiges Vieleck einen Kreis beschreiben müsse. Man kann daher die 13te und 14te Aufgabe im 5ten Buche auflösen.

2te Anmerkung. Ich rede hier und in den folgenden Lehrsatzen, von dem 8ten Lehrsatze an, von *regelmäsigen* (*regulären*) Vielecken, die man in um den Kreis beschrieben habe. Allein *Clavius* bemerkt mit Recht (bey *Euklid's* 4, 16.), dass ein gleichseitiges Vieleck, das man in den Kreis beschrieben habe, immer gleichwinklicht, und folglich regelmäsig, dass aber ein gleichseitiges Vieleck, das man um den Kreis beschrieben habe, deswegen nicht immer auch gleichwinklicht und folglich nicht immer auch regelmäsig sey, die Zahl der Seiten wäre dann eine ungerade Zahl, oder die zween zunächst an einander liegenden Winkel wären, unter der Voraussetzung, die Zahl der Seiten sey eine gerade Zahl, gleich, oder es wären zween Winkel, deren einen man für den *ersten* nähme, und der andere sodann eine gerade Zahl, z. B. 4, 6, u. s. w. bekäme; weiter, dass ein gleichwinklichtes Vieleck, das um den Kreis beschrieben werde, immer gleichseitig, dass aber ein in den Kreis beschriebenes gleichwinklichtes Vieleck es nicht immer sey, es wäre dann die Anzahl der Seiten eine ungerade Zahl, oder es wären dann, wenn sie eine gerade Zahl wäre, die zwo zunächst an einander liegenden Seiten gleich, oder es wären zwo Seiten, deren eine man für die *erste* nähme, und die andere alsdann eine gerade Zahl z. B. 4, 6, u. s. w. bekäme.

6ter

6ter Lehrsatz. 88ste Fig.

In allen in dem Kreise beschriebenen Vierecken (AEBF) *sind immer die gegenüberliegende Winkel zusammen genommen* (AEB *und* AFB;) EAF *und* EBF) *zween rechten Winkeln gleich.*

Euklid 3, 22, — *St.* 106, 107. SS. 12te Pr.

Beweis. Mit 5, 3. 2.

Anmerkung. Man kann also in den Kreis kein Viereck, das diese Eigenschaft nicht besäße, beschreiben. Man kann daher keine Raute, noch Parallelogramm, hingegen ein Quadrat, oder ein Rechteck in den Kreis beschreiben.

7ter Lehrsatz. 88ste Fig.

In allen Vierecken, die man in den Kreis beschrieben hat, ist die Summe der Rechtecke aus den gegenüberliegenden Seiten (FA *und* EB, AE *und* FB) *dem Rechtecke der Diagonalen* AB *und* EF) *gleich.*

Tacquet in seinem *Scholium* zu *Euklids* 6, 10.

Construktion. Man zieht EG auf die Art, daß $\angle$ AEG = $\angle$ FEB; woraus nebst 5, 3. 3. folgt, daß $\triangle$ AEG $\sim$ $\triangle$ FEB; und $\triangle$ GEB $\sim$ $\triangle$ EAF; denn $\angle$ EBG = $\angle$ AFE (5, 3. 3.) und $\angle$ AEG = $\angle$ FEB; folglich, wenn man auf beyden Seiten den $\angle$ GEF hinzufügt; so ist $\angle$ AEF = $\angle$ GEB.

Beweis. Vermöge der Aehnlichkeit der $\triangle\triangle$ AEG und FEB, und der $\triangle\triangle$ GEB und EAF, ist nach

4, 7. 8. No. 2. Recht. FB . AE = Recht. AG . FE, und Recht. BE . AF = BG . EF; woraus vermöge 2, 1. 3. der Lehrſatz geſchloſſen wird.

1ſte *Anmerk.* Dieſen nennt man den Lehrſatz des *Ptolemäus*, weil ihn *Ptolemäus* entweder erfunden, oder zuerſt gebraucht hat, um die Sehnen der Bogen zu berechnen, wie ich dies 8. 11. beweiſen werde. Siehe *Ptolemäus Almageſtum* L. I. Cap. 9.

2te *Anmerk.* Wenn man dieſen Lehrſatz mit dem vorhergehenden Lshrſatze, und dem 2ten Corollarium des 12ten Lehrſatzes im 5ten Buche vergleicht; ſo wird man ſehen, daſs bey einem Vierecke drey Dinge erfordert werden, um es in einen Kreis beſchreiben zu können. Allein dieſe drey Stücke ſind von der Beſchaffenheit, daſs, ſobald eines von den dreyen Statt findet, die zwey andern ebenfalls wahr ſind.

3te *Anmerk.* Man löſe nun die 6te, 7te, 8te, 9te und 10te Aufgaben des 5ten Buchs auf.

8ter *Lehrſatz.* 79ſte Fig.

Wenn man ein regelmäßiges Vieleck in den Kreis beſchrieben hat; ſo theilen 1ſtens die Seiten den Umkreis in ſo viel gleiche Bogen, *als das Vieleck Seiten hat; ſind 2tens dieſe Seiten die Sehnen dieſer Bogen; iſt 3tens der Mittelpunkt des Kreiſes der Mittelpunkt des Vielecks; iſt 4tens der Radius des Kreiſes der des Vielecks ſelbſt; und iſt 5tens diejenige Sehne, welche zwo Seiten eines gegebenen Vielecks begränzt, die*

die Seite eines Vielecks, das die Hälfte der Anzahl von den Seiten des gegebenen Vielecks hat.

1stes Corollarium.

Die Seite eines in den Kreis beschriebenen regelmäßigen Vielecks (EF) *ist die Sehne des Winkels am Mittelpunkte* (FCE), *oder eines Winkels, der* $\frac{4R}{s}$ *gleich ist* (2, 14. 1.)

2tes Corollarium.

Die Seite des in den Kreis beschriebenen Sechsecks ist dem Halbmesser des Kreises gleich (2, 14. 2.).

Anmerkung. Vermöge dieses Corollariums kann man die 15te Aufgabe des 5ten Buchs auflösen.

3tes Corollarium.

Die Lothlinie, die man vom Mittelpunkte eines in den Kreis beschriebenen gleichseitigen Dreyecks auf dessen Seiten herunter fällt, ist die Hälfte des Halbmessers; und die Lothlinie, welche man aus einem seiner Winkel auf die gegenüberliegende Seite herunter fällt; ist anderthalbmal der Halbmesser.

In Rücksicht des ersten Satzes in diesem Corollarium s. *Euklids* 14, 1 Cor.

4tes Corollarium.

Die Seite des in dem Kreise beschriebenen Quadrats verhält sich zum Halbmesser, wie $\sqrt{2}:1$.; und der Inhalt des Quadrats ist die Hälfte des Quadrats auf dem Durchmesser.

Die Seite des in den Kreis beschriebenen Quadrats ist daher in Beziehung auf den Halbmesser unmeßbar.

Euklid 10, 117.

9ter Lehrsatz.

Die Seiten und die Umkreise in und um Kreise von verschiedenen Durchmessern beschriebener, ähnlicher, regelmäsiger Vielecke, verhalten sich wie die Durchmesser jener Kreise. Ihr Inhalt aber steht in doppelter Verhältniß der Durchmesser.

Eukl. 12, 1.

Beweis. Mit dem 5ten Lehrsatze, 2,14. und 4,15.

Anmerkung. Auf diesen Lehrsatz und 4, 2. gründet sich der Gebrauch der Linien, welche auf dem Proportional-Cirkel mit den Buchstaben *Pol.* (Polygone) bezeichnet sind, und mit deren Hülfe man alle *Polygone* oder Vielecke auf eine leichte Art auf gegebene Linien oder in gegebene Kreise beschreiben kann. Allein die Sehnen-Linie ist hierzu noch bequemer. Siehe die 2te Anmerkung zu dem 2ten Lehrsatze im 8ten Buche.

10ter *Lehrsatz*. 79ste Fig.

Wenn man von den Endpunkten der Seiten (F *und* E) *eines in dem Kreise beschriebenen Vielecks, dessen Seiten-Zahl jedoch eine* u n g e r a d e *Zahl ist, nach der Spitze des gegenüberliegenden Winkels* (ABD) *Linien* (FB, EB) *zieht; so werden sie mit der genannten Seite ein gleichschenklichtes Dreyeck* (FBE) *bilden, wovon der eine Winkel* (BFE *oder* BEF) *auf der Grundlinie sich zu dem Winkel* (FBE) *in der Spitze verhält, wie* $\frac{g-1}{2}:1$.

Tacquet zu Euclid 4, 11.

Beweis. Es erhellet nach 5, 3. 3. daſs Δ FBE gleichschenklicht ist. Der übrige Theil ergiebt sich, wenn man erwägt, daſs $<FBE = \frac{1}{2} < FCE = \frac{1}{2} \times \frac{4L}{g}$, und so bald der Winkel FBE bekannt ist, so bald sind es auch die Winkel BFE, FEB, nach 1, 7. 3.

Anmerkung. Eben dies gilt auch, wenn das Vieleck schon nicht in den Kreis beschrieben ist. Es ist daher eine allgemeine Eigenschaft aller regelmäſsigen Vielecke, deren Seiten-Zahl eine *ungerade* Zahl ist.

Corollarium.

Die Winkel auf der Grundlinie sind daher Vielfache vom Winkel in der Spitze, und verhalten sich folglich zu diesem Winkel

in dem (gleichseitigen) Dreyecke = - - - - - - = 1 : 1;
— — — — *Fünfecke* = - - - - - - = 2 : 1;
— — — — *Siebenecke* = - - - - - - = 3 : 1;
— — — — *Neunecke* = - - - - - - = 4 : 1;

Anmerkung. Man kann nun die 11te Aufgabe (nach ihrer 1sten Auflösung) und die 12te Aufgabe im 5ten Buche auflösen. *)

11*ter Lehrsatz.* 80ste Fig.

Wenn man von dem Mittelpunkte eines Kreises auf die Seite (GF) *eines in ihm beschriebenen regelmäßigen Vielecks, dessen Seiten-Zahl eine gerade Zahl* (g) *ist, eine Lothlinie* (CL) *herunterfällt, und sie hierauf auf beyden Seiten bis an den Umkreis verlängert, um sie zu einem Durchmesser zu machen; so wird dieser Durchmesser die Seite* (GF) *auf welche er fällt, in zween gleiche Theile* (GL, LF) *theilen, und werden die Linien* (GH, FH), *welche man von den Endpunkten der genannten Seite* (GF) *nach dem Ende* (H) *dieses Durchmessers zieht, mit dieser Seite ein gleichschenklichtes Dreyeck bilden, worin sich einer der Winkel* (HGF *oder* HFG) *auf der Grundlinie zu dem Winkel* (GHF) *in der Spitze, wie* $\frac{g-1}{2}$: 1 *verhalten wird.*

Tacquet zu *Eukl.* 4, 11.

Beweis. Er ist der des vorhergehenden Lehrsatzes.

Corol-

*) Vergl. hiemit den 21sten Lehrsatz und dessen 1stes Corollarium.

Corollarium.

Die Winkel auf der Grundlinie ſind alſo in ſolchem Falle Vielfalche von den Winkeln in der Spitze auf folgende Art:

Jene verhalten ſich zu dieſem

Für das Quadrat, $= \frac{3}{2} : 1$;
— — Sechseck, $= \frac{5}{2} : 1$;
— — Achteck, $= \frac{7}{2} : 1$;
— — Zehneck, $= \frac{9}{2} : 1$;
und ſo weiter.

Anmerkung. Es ergiebt ſich aus dieſem und dem vorhergehenden Lehrſatze, daſs, wenn man mit Hülfe der Meſskunde jene allgemeine Aufgabe, ein gleichſchenklichtes Dreyeck zu beſchreiben, deſſen Winkel auf der Grundlinie ſich zu dem in der Spitze, wie 1, $1\frac{1}{2}$, 2, $2\frac{1}{2}$, 3, $3\frac{1}{2}$, 4, u. ſ. w. zu 1, verhielten, auflöſen könnte, man alle regelmäſige Vielecke in den Kreis ebenfalls *geometriſch* zu beſchreiben im Stande wäre. Jene Aufgabe hängt nun, wie es für ſich deutlich, und bereits von *Pappus* in ſeinen *Collectiones Mathematicae* bemerkt worden iſt, von dem Probleme, einen Kreisbogen in zween Theile, welche eine beſtimmte Verhältnis zu einander haben, zu theilen, ab. Dieſes Problem kann man aber überhaupt *geometriſch*, das heiſst, mit bloſser Hülfe von geraden Linien und dem Kreiſe nicht auflöſen.

Man hat bis jezt kein Mittel ausgefunden, um andere Vielecke, als die des Dreyecks, Vier-

Vierecks, Fünfecks, Sechsecks, und diejenige Vielecke, welche aus jenen durch wiederhohlte Theilung der Bogen in zween gleiche Theile, oder auch vermöge des folgenden Lehrsatzes beschrieben werden können, gerade zu (directe) in den Kreis zu beschreiben. Man kann kein Siebeneck, kein Neuneck, kein Eilfeck, u. s. w. geometrisch in den Kreis beschreiben.

Der Hülfe des gleichschenklichten Dreyecks, dessen in diesem und dem vorhergehenden Lehrsatze Erwähnung geschehen ist, bedient man sich für die Beschreibung des Dreyecks in den Kreis noch für die des Quadrats, noch für die des Sechsecks, da man diese Figuren auf einfachere Weisen in den Kreis beschreiben kann; sondern man bedient sich desselben nur für das Fünfeck.

12*ter Lehrsatz.* 79ste oder 162ste Fig.

Zieht man von dem Punkte E *der Kreislinie die Sehne* EF, *welche die Seite eines Vielecks von* g *Seiten ist, und zieht man über dies die Sehne* EI, *welche die Seite eines Vielecks von* G *Seiten ist; so wird der Bogen* FI *so viele Seiten eines Vielecks, dessen Seiten-Zahl* G x g *seyn wird, einschliessen, als in dem Unterschiede zwischen* G *und* g *Einheiten enthalten sind.*

Beweis. Wegen des 1sten Corollariums vom 8ten Lehrsatze.

1stes

1stes *Corollarium.*

Die Sehne des Bogens FI *selbst wird die Seite eines Vielecks von* $\frac{G \times g}{G - e}$ *Seiten seyn; und, wenn* $\frac{G \times g}{G - g}$ *eine ganze Zahl, und also* G g *ein Vielfaches von* G — g *ist; so wird man folglich dieses Vieleck in den Kreis beschreiben können. Ist* G x g *kein Vielfaches von* G — g, *dagegen* G — g = 2, *oder = irgend eine Macht von* 2; *so wird man ebenfalls das Vieleck in den Kreis beschreiben können; denn der Bogen* FI *wird* 2, *oder so viele Seiten des Vielecks enthalten, als jene Macht von* 2 *betragen wird; und folglich kann man vermittelst einer wiederhohlten Theilung in zween Theile, die man geometrisch verrichtet, für jede Seite den Bogen bestimmen; welches man nicht thun kann, wenn* G — g = 3, *oder* = 5, *oder* = 6, *u. s. w. ist. Wäre* EF, *zum* Beyspiel, *die Seite eines Dreyecks, und* IE *die eines Fünfecks; so würde* IF *zwo Seiten eines Fünfzehnecks in sich schließen. Man kann daher jezt die* 16te *Aufgabe im* 5ten *Buche auflösen.*

2tes *Corollarium.*

Die Beschreibung der Vielecke auf gegebenen Linien hängt von der Beschreibung der Vielecke in den Kreis ab.

Anmerkung. Diese Beschreibung geschicht auf eine sehr leichte Art mit Hülfe derjenigen Linien, welche auf dem *Proportional-Cirkel* mit den Buchstaben *Pol.* *) bezeichnet worden sind?

*) S. die Anmerkung zu dem 9ten Lehrsatze.

13ter *Lehrsatz.*

Theilt man den Halbmesser (CI) *des Kreises* (*in* Z) *nach stetiger Proportion, so ist das gröste Stück* (CZ) *die Seite des in den Kreis beschriebenen Zehnecks.*

Construktion. Man ziehe $IE = CZ$, und ziehe CE, EZ.

Beweis. Vermöge 2, 10. 1. ist

$< CIE = < CEI = 2 < ICE$;

allein $< CIE + < CEI + < ICE = 2 <$ (1, 7.);

folglich $5 < ICE = 2 <$,

und $< ICE = \frac{2<}{5} = \frac{4<}{10}$;

folglich $IE = CZ$ die Seite des Zehnecks (1stes Corollarium des 8ten Lehrsatzes.)

2stes *Corollarium.*

Folglich ist die Seite des Zehnecks in Beziehung auf den Halbmesser unmeßbar (4, 7. 6. 6.)

2tes *Corollarium.*

Die Lothlinie (CK) *des Fünfecks ist die halbe Summe vom Halbmesser* (*oder der Seite des Sechsecks*) *und von der Seite des Zehnecks zusammengenommen.*

Eucl. 14, 1.

Beweis. Wenn $IF = IE = CZ$ die Seite des Zehnecks ist; so ist FE die Seite des Fünfecks, und CK die Lothlinie (nach dem 8ten Lehrsatze).

Nun ist $CK = CZ + ZK$; IE aber $= CZ = ZE$ (2, 10. 1.) folglich $ZK = KI$ (1, 11. 4.); folglich $CK = CZ + \frac{1}{2}ZI = CZ + \frac{1}{2}(CI - CZ) = \frac{1}{2}CZ + \frac{1}{2}CI = \frac{IE + CI}{2}$.

3tes Corollarium.

Nimmt man die Summe von dem Halbmesser, oder der Seite des Sechsecks, und von der Seite des Zehnecks; so ist die ganze Linie nach stetiger Verhältniss Gleichheit geschnitten, und der Radius ist das gröste Stück dieser Linie.

Denn nach unserm Lehrsatze ist CZ die Seite des Zehnecks, und

$CI : CZ = CZ : ZI$;
folglich $CI : CZ + CI = CZ : CZ + ZI$;
oder $CI : BZ = CZ : CI$ oder BC;
oder $CZ : BC = BC : BZ$.

Eukl. 13, 9.

Siehe weiter in Rücksicht auf die Grösse der ganzen Linie BK, die aus der vom Mittelpunkte gezogenen Lothlinie CK, und dem Halbmesser CI besteht, mit Beziehung auf die Grösse der Seite des Fünfecks, das Corollarium des 31sten; No. 3 und No. 5 des 33sten, und No. 5 des 34sten Lehrsatzes

 im

im 11ten Buche. Siehe auch die 1ste Auflösung der 16ten Aufgabe im 5ten Buche der Probleme.

14ter *Lehrsatz.* 162ste Fig.

Das Quadrat der Seite des Fünfecks ist der Summe der Quadrate von der Seite des Zehnecks, und von der Seite des Sechsecks, oder des Halbmessers, gleich.

Eukl. 13, 10.

Construktion. Cb seye auf IE, oder auf der Seite des Zehnecks senkrecht, und folglich Ib = bE. Man ziehe von I die Linie IO nach dem Punkte O, worin Cb die Linie FE, Seite des Fünfecks, schneidet; folglich ist IO = OE.

Beweis. < ECO = ½ < ICE; < IFE = ½ < ICE (5, 3.); folglich < ECO = < IFE. Nun ist < IFC = 2 < FCI (weil FI die Seite des Zehnecks ist), = < FCE; folglich < FCE — < ECO = < IFC — < IFE, oder < OCF = < CFO, und folglich 1stens OC = FO; 2tens der dritte Winkel < COF = dritter < FCE, und Δ FCO ∾ Δ FCE;

folglich

FE : FC = FC : FO.

Eben so ist Δ EIO ∾ Δ FIE, und folglich

FE : IE = IE : OE,

und folglich (4, 7. 5.)

□ auf IE + □ FC = Recht. aus OE, FE + Recht. aus FO, FE = Recht. aus FE, FE = □ auf FE.

1stes

1ſtes Corollarium.

Aus dieſem Lehrſatze, und dem 1ſten Corollarium des 13ten Lehrſatzes ergiebt ſich, daß die Seite des Fünfecks in Beziehung auf den Halbmeſſer und eben ſo in Beziehung auf die Seite des Zehnecks unmeßbar iſt.

2tes Corollarium.

Das Quadrat der Seite (FE) *vom Fünfeck nebſt dem Quadrate der Sehne* (FB), *welche zwo Seiten des Fünfecks begränzt, iſt fünfmal ſo groß, als das Quadrat der Seite vom Sechseck, oder dem Halbmeſſer;*

denn □ auf FB + □ auf FI = □ auf BI = 4 □ auf CI; allein □ auf FE = □ auf FI + □ auf CI; folglich □ auf FB + □ auf FE + □ auf FI = 4 □ auf CI + □ auf FI + □ auf CI; oder □ auf FB + □ auf FE = 5 □ auf CI.

Eukl. 14, 2. Lemma.

3tes Corollarium.

Zieht man von dem Mittelpunkte C *auf den Durchmeſſer* AB *die Lothlinie,* CD, *theilt hierauf den Halbmeſſer* CB *in zween gleiche Theile in* E, *zieht ferner* DE, *und beſchreibt mit dem Halbmeſſer* ED *aus* E *den Bogen* DF; *ſo wird die Sehne* FD *die Seite des in den Kreis beſchriebenen Fünfecks, und das Stück* FC *die Seite des in den Kreis beſchriebenen Zehnecks ſeyn;*

denn Recht. aus BF, FC + □ auf CE = □ auf FE = □ auf DE (2, 4. Cor.);
allein □ auf DE = □ auf DC + auf CE (2, 7.);
folglich Recht. aus BF, FC + □ auf DC = □ auf BC;
folglich BF : BC = BC : FC (4, 7. 5tes Cor.),
und BF — BC : BC = BC — FC FC (3, 8. 2tes Glied des Lehrs. oder No. 4 des Cor.),
oder FC : BC oder AC = AF : FC,
oder AC : FC = FC : AF;

folglich ist der Halbmesser AC nach stetiger Proportion getheilt; folglich ist FC die Seite des Zehnecks (13ter Lehrsatz); und folglich, da □ auf FC + □ auf CD = □ auf FD; ist FD die Seite des Fünfecks (nach diesem Lehrsatze).

1ste Anmerkung. Dieses Corollarium zeigt die leichteste Art an, wie man ein Fünfeck und ein Zehneck in den Kreis beschreiben könne. Ptolemäus hat sie in seinem *Almagestum* L. 1. Cap. 9. angegeben.

2te Anmerkung. Siehe im 5ten Buch der Aufgaben des 11ten Problems 2te Auflösung, des 16ten Problems ebenfalls 2te Auflösung.

15*ter Lehrsatz.* 162ste Fig.

Der Inhalt eines in den Kreis beschriebenen Fünfecks ist dem Rechtecke unter fünf Sechstheilen der Sehne, welche zwo Seiten vom Fünfecke begränzt, und anderthalb mahl dem Halbmesser gleich.

Eukl. 14, 4. Lemma. *)

Beweis. Da das Δ FEC gleichschenklicht ist; so ist Δ FCE = Recht. aus $\frac{1}{2}$ CE und FS = Recht. aus $\frac{3}{2}$ CE und $\frac{1}{3}$ FS = Recht. aus $\frac{3}{2}$ CE und $\frac{1}{6}$ FD, und folglich ist 5 Δ FCE = Fünfeck FEDBAF = 5 Recht. aus $\frac{3}{2}$ CE und $\frac{1}{6}$ FD = Recht. aus $1\frac{1}{2}$ CE und $\frac{5}{6}$ FD.

16*ter Lehrsatz.* 144ste Fig.

Das Quadrat der Seite eines in den Kreis beschriebenen gleichseitigen Dreyecks ist dem dreyfachen Quadrate auf der Seite des Sechsecks oder dem Halbmesser, oder auch dem Rechtecke aus dem Durchmesser und der aus der Spitze des Dreyecks auf die Grundlinie niedergefällten Lothlinie gleich.

Eukl. 13, 12.

Beweis. Des 1sten Satzes. $\frac{1}{4}$ □ auf DF = □ auf DK = □ auf CD — □ auf CX (2, 7.); allein □ auf CX = $\frac{1}{4}$ □ auf CE oder CD (8ten Lehrsatzes 3tes Cor.), und daher $\frac{1}{4}$ □ auf DF = $\frac{3}{4}$ □ auf CD, oder

□ auf DF = 3 □ auf CD; *w. z. b. w.*

— des 2ten Satzes.

oder □ auf DF = Recht. aus CD und 3 CD
= Recht. aus 2 CD und $\frac{3}{2}$ CD;

*) Dieses Lemma finde ich in keiner der Ausgaben, deren ich mich gegenwärtig zu bedienen Gelegenheit habe.

allein $\frac{3}{2}$ CD = AX (8ten Lehrsatzes 3tes Cor.); folglich □ auf DF = Recht. aus 2 CD und AX; *w. z. b. w.*

Anmerkung. Siehe *Stedman Phil. Trans.* Vol. LXVI. p. 299. wobey *Horsley* sehr richtig bemerkt, daſs dies ein Corollarium von dem Satze seye, welcher sich auf *alle Dreyecke* beziehe, dem Satze nehmlich, nach welchem das Rechteck aus zwoen Seiten des Dreyecks (welches im gleichseitigen Dreyecke das Quadrat der Seiten ist) dem Rechtecke aus dem Durchmesser des um das Dreyeck beschriebenen Kreises, und der aus dem Winkel, welchen die genannte Seiten einschlieſsen, auf die dritte Seite niedergefallten Linie gleich seye. Dies wird vermoge der Aehnlichkeit der Dreyecke sehr leicht bewiesen;

denn (s. die 159ste Fig.) △ABI ∾ △BFD,
weil BAI = < BFD = <;
< AIC = < BDF; folglich < ABI = < EBD; und (4, 2.) AB : BI = BF : BD; und folglich (4, 7. 5.)
Recht. aus AB, BD = Recht. aus BI, BF.

Corollarium.

Die Dreyecks-Seite ist folglich in Beziehung auf den Halbmesser unmeßbar. Wir haben schon gesehen, daß eben dies in Rücksicht auf die Quadratseite (8ten Lehrsatzes 4tes Corollarium), *in Rücksicht auf die Fünfecks- und Zehnecks-Seite* (14ten Lehrsatzes 1stes Corollarium) *Statt habe.*

17ter *Lehrsatz.* 162ste Fig.

Theilt man die Bogen, welche von den Seiten eines in den Kreis beschriebenen regelmäßsigen Vielecks begränzt werden, in zween gleiche Theile; so machen 1stens die Sehnen dieser Bogen ein neues regelmäßiges Vieleck, welches zweymal so viel Seiten als das gegebene Vieleck hat; verhält sich 2tens jede Seite (IE) *dieses neuen oder folgenden Vielecks zu der halben Seite* (KE) *des ersten oder vorhergehenden Vielecks in unterdoppelter Verhältniß des Durchmessers* (BI) *zu ihrem von der Seite des vorhergehenden Vielecks abgeschnittenen Theile* (BK); *stehen 3tens die Umkreise der beyden Vielecke in der nehmlichen Verhältniß zu einander; verhält sich 4tens der Inhalt des neuen oder folgenden Vielecks zu dem Inhalte des ersten oder vorhergehenden, wie der Halbmesser* (CI) *des Kreises zu der Lothlinie* (CK) *des vorhergehenden Vielecks; oder 5tens: wie die Seite* (FE) *dieses vorhergehenden Vielecks zu der von dem Endpunkte* (F) *dieser Seite* (FE) *auf den Halbmesser* (CE) *gefällten Lothlinie* (FS); *oder steht endlich 6tens jener Inhalt zu diesem in unterdoppelter Verhältniß des Durchmessers* (TE) *zu seinem von der Lothlinie* (FS) *abgeschnittenen Stücke* (TS.)

Beweis. Der 1ste Satz versteht sich von selbst.

Beweis des 2ten und 3ten Satzes. Nachdem man die Seite FE in K in zween gleiche Theile getheilt, und aus K den Halbmesser IKB rechtwinklicht auf sie gezogen hat, vermöge 5, 4. und der Aehnlichkeit der △△ IKE und IBE (4, 2.)

Beweis des 4ten Satzes. Indem man erwägt, daſs, wenn g die Anzahl Seiten des vorhergehenden Vielecks bezeichnet, dieſes Vieleck $= 2g \times \Delta$ KCE, und das folgende Vieleck $= 2g \times \Delta$ ICE iſt, dieſe Dreyecke ſich = CK : CI zu einander verhalten, und daher das folgende Vieleck zu dem vorhergehenden in der Verhältniſs CI : CK ſteht.

Beweis des 5ten und 6ten Satzes. Vermöge der Aehnlichkeit der Dreyecke FSE und CEK iſt CK : CE oder CI = FS : EF $= \sqrt{ST} : \sqrt{TE}$ (4. 12. 3.), und daher das folgende Dreyeck : dem vorhergehenden = FE : FS $= \sqrt{TE} : \sqrt{TS}$.

1*ſte Anmerkung.* Dieſen letztern Satz theilte uns Herr *Hennert* in dem 5ten Theile *der Verhandelingen van de Hollandſche Maatſchappy* (250ſte S.) mit. Ich habe ihn hier noch auf eine einfachere Art bewieſen. Herr *Hennert* bedient ſich anderer Ausdrücke. Er nennt nehmlich FS Winkelmaaſs oder *Sinus* des < FCE oder des Mittelpunktswinkels. FE oder die doppelte KE heiſst Er das doppelte Winkelmaaſs vom halben Mittelpunktswinkel, und ST das umgekehrte Winkelmaaſs (Sinus verſus) von dem < TCF oder dem Complemente des Mittelpunktswinkels FCE. Ich werde dieſe Ausdrücke im 8ten Buche erklären.

1*ſtes Corollarium.*

Der Umkreis eines in den Kreis beſchriebenen regelmäſigen Vielecks iſt kleiner, als der Umkreis eines in den

den nehmlichen Kreis beschriebenen regelmäßigen Vielecks, das doppelt so viele Seiten also das erstere hat.

2tes Corollarium.

Der Inhalt eines in einen Kreis beschriebenen regelmäßigen Vielecks ist kleiner, als der — eines andern in den nehmlichen Kreis beschriebenen regelmäßigen Vielecks, das eine doppelte Anzahl Seiten hat.

3tes Corollarium.

Da das Vieleck auf FE : *dem Vieleck auf* IE = CK : CI, *und* CK : CI = CK : CE = FT : TE; *so verhält sich ein in den Kreis beschriebenes Vieleck zu einem in den nehmlichen Kreis beschriebenen Vielecke, welches eine doppelte Anzahl Seiten hat, wie sich die Sehne des Complements von dem Bogen, welcher von der Seite des erstern Vielecks begränzt ist, zu dem Durchmesser verhält.*

Vieta, Oper. p. 398.

4tes Corollarium.

Hieraus ergiebt sich ebenfalls, daß, wenn ein in den Kreis beschriebenes Vieleck gegeben ist, und man vermöge der Theilung der Bogen in zween gleiche Theile ein anderes Vieleck, welches folglich die doppelte Anzahl Seiten hat, sodann ein drittes Vieleck, welches ebenfalls eine doppelte Anzahl Seiten hat, weiter ein viertes Vieleck u. s. w. beschreibt, das erste Vieleck sich zu dem letzten Vielecke (nimm an, dieses sey das nste) in der zusammengesetzten Verhältniß aller

Sehnen der Complement-Bogen zu der Macht $n-1$ *des Durchmessers verhalten wird.*

Anmerkung. Man kann sich dieses von *Vieta* (Oper. 399.) mitgetheilten Lehrsatzes sehr vortheilhaft bedienen, um den Inhalt des Kreises finden zu lernen.

5tes *Corollarium.*

Vermöge eines in diesem Lehrsatze enthaltenen Satzes kann man vermittelst eines Vielecks, welches nur die halbe Anzahl Seiten hat, den Inhalt eines gewissen Vielecks, das heißt, man kann vermöge jenes Satzes den Inhalt eines folgenden Vielecks mit Hülfe eines vorhergehenden berechnen. Da man in diesem Falle mit Zahlen zu thun hat; so wird man auf dasjenige, was ich in 4, 7. 8. *und den Anmerkungen angemerkt habe, Acht geben müssen. Indem man auf jene Art von diesen Ausdrücken Gebrauch macht; so ist die Zahl, wodurch der Inhalt des vorhergehenden Vielecks ausgedrückt wird* $= 2g \times \Delta CKE = g \times CK \times KE$, *und ist folglich*

das folgende Vieleck: $g \times CK \times KE = CI : CK$,
und dieses folgende Vieleck $= \frac{g \times CK \times KE \times CI}{CK} =$

$\frac{g \times FE \times CI}{2} =$ (wenn $CI = 1$) $= \frac{g \times FE}{2}$; *woraus jener vortrefliche Lehrsatz des Ludolph van Ceulen (in seinem Buche über den Kreis, welchen man auch bey Snellius prop. 3 finden kann) sich ergiebt. Er lautet in Worten ausgedruckt also:*

„Multiplicirt man die Seite eines in einen Kreis, „dessen Halbmesser man als die Einheit annimmt, beschrie-

benen

„benen Vielecks mit der halben Anzahl Seiten; so erhält man den Inhalt eines in den nehmlichen Kreis „beschriebenen Vielecks von einer doppelten Anzahl „Seiten."

6tes Corollarium.

Da das folgende Vieleck $= \frac{g \times FE \times CI}{2}$ *ist; so ist ein Vieleck einem Dreyecke gleich, dessen Höhe der halbmesser und die Grundlinie der Umkreis eines Vielecks von nur halb so vielen Seiten ist, als das gegebene Vieleck hat.*

3*te* *Anmerkung.* Dies ist ein sehr wichtiger Lehrsatz, welchen *Huigens* in seiner 7ten Proposition (*L. de vera Circuli magnitudine*) bewiesen hat.

7tes Corollarium.

Folglich verhält sich der Inhalt des Sechsecks zu dem Inhalte des Dreyecks (s. die 144ste Fig.) wie CA : CV = 2 : 1. (8*ten Lehrsatzes* 3*tes Corollarium*); *folglich ist das Sechseck doppelt so groß, als das Dreyeck. Dies ist die* 5*te Proposition von* Snellius.

8tes Corollarium.

Folglich ist der Inhalt des Zwölfecks der Hälfte von Sechsmal die Seite des Sechsecks mit dem Halbmesser multiplicirt gleich, oder er ist dreymahl das Quadrat des Radius, (8*ten Lehrsatzes* 2*tes Corollarium*) *oder er ist dem Quadrate von der Seite des gleichseiti-*

ſeitigen Dreyecks (16ter Lehrſatz) gleich. Der erſte dieſer Sätze iſt die 5te Propoſition bey S n e l l i u s; *worüber man* H e n n e r t *am angeführten Orte nachſehen kann. Der zweyte Satz iſt ſeine 4te Propoſition.*

9tes Corollarium.

Woraus (nebſt des 8ten Lehrſatzes 4tem Corollarium) ebenfalls erhellet, daſs der Inhalt des in den Kreis beſchriebenen Zwölfecks ſich: dem in den nehmlichen Kreis beſchriebenen Quadrate wie 3. 2, und: dem Quadrat auf dem Durchmeſſer wie 3 : 4 verhält.

18ter Lehrſatz. 162ſte Fig.

Das Quadrat auf der Seite (FE) *eines in den Kreis beſchriebenen Vielecks verhält ſich zu dem Mittelpunkts-Dreyecke* (CIE) *eines in den nehmlichen Kreis beſchriebenen Vielecks von einer doppelten Anzahl Seiten, wie ſich die halbe Seite* (KE) *des erſtern Vielecks zu dem achten Theile des Halbmeſſers verhält.*

Beweis. $\Delta CIE : \Delta CEK = CI : CK$ (4, 6.);
folglich $\Delta CIE : \frac{1}{2}$ Recht. aus $CK, KE = CI : CK$,
oder $\Delta CIE : \frac{1}{2} KE = CI : 1$.
und folglich $\Delta CIE : \square$ auf $KE = CI : 2 KE$ (3, 10. 2.);
folglich $\square$ auf $FE : \Delta CIE = KE : \frac{1}{8} CI$.

Anmerkung. Dies iſt die ſchöne Propoſition Herrn *Hennert's* im angeführten Werke S. 245. Ich habe hier den Beweis kürzer geführt. Herr *Hen-*

Hennert bedient sich für KE des Ausdrucks: *Sinus des halben Mittelpunkts-Winkels.* Diesen Ausdruck werde ich ebenfalls im 8ten Buche erklären.

Corollarium.

△CIE : □ auf CI = ½KE : CI,

das heisst:

das Mittelpunkts-Dreyeck eines Vielecks verhält sich zum Quadrat des Halbmessers, wie die halbe Seite eines Vielecks, das nur die halbe Anzahl von Seiten hat, sich zu dem Halbmesser verhält.

Hennert p. 255.

19*ter Lehrsatz*, 162ste Fig.

Wenn man in einen Kreis ein regelmäsiges Vieleck (EFABDE) *beschrieben hat; so wird die Seite* (IE) *eines in den nehmlichen Kreis beschriebenen regelmäsigen Vielecks* (EIFtA u. s. w.), *welches eine doppelte Anzahl Seiten hat, zwischen dem Halbmesser und dem Unterschiede* (QE) *des Durchmessers* (TE) *und der Sehne* (FT) *des Complements* (TAtF) *von dem Bogen* FIE, *welcher die Seite des erstern Vielecks begränzt, eine mittlere Proportional-Linie seyn.*

Construktion. 1stens ziehet man von C, Cb ⊥ auf IE diese senkrechte Linie Cb schneidet die Linie KE in O;

2tens

2tens; ziehet man von I durch O die Linie IP auf CE;

3tens; beschreibt man aus T mit dem Halbmesser TF den Bogen FQ, so dass TQ = TF seyn, und folglich QE = TE − TQ = TE − TF.

Beweis. Aus der Construction und 1, 11. 5. ergiebt sich 1stens; dass IO = OE; 2tens ist in den ΔΔ CIO und CEO, <CIO = <CEO; daher 3tens; in den ΔΔ KOI und OPE, KO = OP, und <OPE = <OKI = <; folglich ist IP ⊥ auf CE; folglich 4tens; in den ΔΔ CKO und COP, CK = CP; und folglich 5tens; vermöge Δ TFE ∾ Δ KCE und 3, 9. CK = $\frac{1}{2}$ TF, und folglich CP = $\frac{1}{2}$ TF. Ist dies einmal angenommen; so ist nach Δ TEI ∾ Δ IPE, TE:IE = IE:PE, und folglich (4, 7. 5.)

□ auf IE = Recht. aus TE und PE
= Recht. aus TE und (CE − CP)
= Recht. aus TE und (CE − $\frac{1}{2}$ TF)
= Recht. aus TE und ($\frac{2 CE - TF}{2}$)
= Recht. aus $\frac{1}{2}$ TE und (TE − TF)
= Recht. aus CE und QE.

1ste Anmerkung. Man findet diesen Lehrsatz bey *Snellius* Prop. 1. und schon bey *Ptolemäus* (*Almagestum Libr. I. Cap*. 2.) Allein er ist auf folgende Art ausgedrückt:

TE:IE = IE:PE, nun ist PE = $\frac{1}{2}$ (TE − TF) = $\frac{1}{2}$ QE.

Corol-

Corollarium.

Da nun □ *auf* IE = *Recht. aus* $\frac{TE}{2}$ *und* (TE − TF), *und* □ *auf* TI = □ *auf* TE − □ *auf* IE (2. 7. 1.); *so ist* □ *auf* TI = *Recht. aus* TE, TE − *Recht. aus* $\frac{TE}{2}$ *und* (TE − TF) = *Recht. aus* $\frac{TE}{2}$ *und* (2TE − TE + TF = *Recht. aus* $\frac{TE}{2}$ *und* (TE + TF). *Dies ist der von* ***Snellius*** *gefundene berühmte Lehrsatz, dessen Nutzen von so großer Wichtigkeit ist, um den Inhalt der Vielecke zu finden. Es ist der Satz nehmlich, daß*

„*das Quadrat auf der Sehne vom Complement des*
„*von der Seite eines Vielecks begränzten Bogens*
„*dem Rechtecke aus dem Halbmesser und der*
„*Summe des Durchmessers nebst der Sehne des*
„*Complements von dem Bogen gleich ist, wel-*
„*cher von der Seite eines Vielecks, das nur die*
„*halbe Anzahl von Seiten hat, begränzt wird.*“

2te Anmerkung. Dieser Lehrsatz ist von grossem Einfluss, um den Umkreis der Vielecke, deren Anzahl von Seiten man immer doppelt nimmt, auf eine leichte Art finden zu können; denn wenn ein Vieleck, z. B. ein Sechseck, oder ein Quadrat gegeben ist; so berechnet man zuerst vermöge dieses Lehrsatzes die Seite des Vielecks, welches noch einmahl so viele Seiten hat, und sodann, vermittelst dieses Corollariums die Sehne des Complementsbogens, nun wieder vermittelst des Lehrsatzes die Seite des folgenden Vielecks, u. s. w. Alle diese Berechnungen folgen einem beständi-

ständigen Gesetze, wie dies bey *Snellius*, und eben so bey *Montuela* Hist. de la Quadrature du Cercle p. 52. nachgesehen werden kann.

20ster Lehrsatz. 89ste Fig.

Theilt man die zunächst an einander liegende Seiten (FG, FE *u. s. w.*) *eines regelmäßigen Vielecks in zween gleiche Theile, und verbindet diese Theilungspunkte* (L *und* M) *mit Linien* (z. *B.* LM); *so wird 1stens ein neues Vieleck daraus entstehen, welches dem erstern ähnlich, und in dasselbe beschrieben seyn wird; wird sich 2tens seine Seite zu der Seite des gegebenen Vielecks verhalten, wie sich die Lothlinie* (CL) *des gegebenen Vielecks zu seinem Halbmesser, oder dem Halbmesser des Kreises verhält, in welchen es beschrieben worden ist; werden 3tens die Umkreise in dieser nehmlichen Verhältnis; und 4tens ihr Inhalt in der verdoppelten Verhältniß; oder auch 5tens in der Verhältniß der Lothlinie* (CR) *des neuen Vielecks zu dem Halbmesser* (CF(*des gegebenen Vielecks, zu einander stehen.*

Beweis: des 1sten Satzes. Vermöge 2, 18. und der 1sten Erkl. in diesem Buche

— —: *des 2ten und 3ten Satzes.* Vermöge der Aehnlichkeit der Dreyecke LRF, CLF und CLR.

— —: *des 4ten Satzes.* Vermöge 4, 17.

— —: *des 5ten Satzes.* Indem man erwägt, dass sich diese Vielecke zu einander verhalten = △ CLR : △ CLF, und folglich (4, 6.) = CR : CF.

An-

Anmerkung. Ich werde dieses Vieleck im 4ten Corollarium des folgenden Lehrsatzes das in das gegebene Vieleck beschriebene Vieleck heissen. Die Ursache davon erhellet aus der 2ten Anmerkung zu der 1sten Erklärung.

21ster Lehrsatz. 162ste Fig.

Verlängert man die Halbmesser (CF, CE) *einer in den Kreis beschriebenen Vielecks* (FEDBAF), *bis sie der aus dem Punkte* (I), *worin die verlängerte Lothlinie* (CI) *den Umkreis schneidet, gezogenen Berührungs-Linie* (*in* N *und* G) *begegnen; so wird das Stück* (NG), *welches man auf diese Art von jener Berührungs-Linie abschneidet, die Seite eines um den Kreis beschriebenen regelmäßigen und ähnlichen Vielecks seyn; oder theilt man die aneinander liegende Seiten* (DE *und* EF) *des in den Kreis beschriebenen Vielecks in zween gleiche Theile, und zieht aus dem Mittelpunkte* (C) *durch die Theilungspunkte* (R *und* K) *Linien* (CRU *und* CKV), *bis daß sie der Berührungs-Linie begegnen, welche man in dem Punkte* (E), *worin jene Seiten* (FE *und* DE) *zusammenstoßen, gezogen hat; so wird das Stück* (VU) *dieser Berührungs-Linie, ebenfalls die Seite eines so wohl um den Kreis, als um das erstere Vieleck beschriebenen ähnlichen Vielecks seyn.*

Weiter verhält sich die Seite (NG *oder* VU) *des Vielecks um den Kreis zu der Seite* (FE *oder* IL) *des Vielecks in dem Kreise, wie der Halbmesser* (CI) *des Kreises zu der Lothlinie* (CK) *des Vielecks in dem Kreise: die Umkreise stehen in der nehmlichen Verhältniß: der Inhalt der Vielecke in der nehmlichen,*

nur verdoppelten Verhältniß, oder die Vielecke verhalten sich auch ihrem Inhalte nach, wie sich der Halbmesser des Kreises zu der Lothlinie (CQ) des Vielecks verhält, welches man in das gegebene Vieleck (FEDBAF) beschrieben hatte.

Beweis des 1sten und 2ten Satzes. Wegen der Gleichheit der △△NCI *) und VCE, vermöge 1, 9.

— — *des 3ten Satzes.* Wegen der ähnlichen △△CKE und CIG: — Sodann vermöge 4, 18. und 17. Endlich indem man erwägt, daſs sich die Vielecke um und in dem Kreiſe wie △CIG: △CKE=IG:KQ, (4, 6.)=CI:CQ verhalten. **)

1stes Corollarium.

Es erhellet aus diesem Lehrsatze, wie man um ein regelmäsiges Vieleck oder um einen Kreis ein regelmäsiges und ähnliches Vieleck beschreiben kann, und daß um Vielecke oder Kreise nur in den Kreis beschreibbare regelmäsige Vielecke beschrieben werden können.

Vermöge dieser Folgerung kann man das 2te, 4te, 7te, 8te, 12te und 18te Problem im 5ten Buche der Aufgaben auflösen. Vergl. die Anmerkung zum 1sten Lehrsatze.

2tes

*) Man könnte hier wohl dazwiſchen fügen: CFK, und am Ende noch ſagen, vermöge 1, 7.

**) Ich wollte hier lieber kurz ſetzen: wegen △CIG ∾ △CKQ.

2tes Corollarium.

So bald die Seite eines in den Kreis beschriebenen Vielecks gegeben ist, kennt man auch die Seite des um den Kreis beschreibbaren ähnlichen Vielecks. Siehe das 17te Problem im 5ten Buch der Aufgaben.

3tes Corollarium.

Die Seite des um den Kreis beschriebenen Quadrats ist dem Durchmesser gleich: und folglich ist sein Inhalt zweymahl so groß, als das in den Kreis beschriebene Quadrat (8ten Lehrsatzes 4tes Corollarium.)

4tes Corollarium.

Die Seite des um den Kreis oder ein Vieleck beschriebenen Vielecks verhält sich zu der Seite dieses Vielecks, wie sich diese Seite zu der Seite des in das letztere oder gegebene Vieleck beschriebenen Vielecks verhält, das heißt (nach dem vorhergehenden Lehrsatze und diesem):

VU : IL (*oder* FE) = IL (*oder* FE) : RK, *und folglich:*

„Ist die Seite dieses gegebenen Vielecks zwischen der Seite des Vielecks in demselben, und der „Seite des Vielecks um dasselbe die mittlere Proportional Linie. Eben so verhält es sich mit dem wech„selseitigen Inhalt dieser Vielecke;“

den □ *auf* VU : □ *auf* FE = □ *auf* FE : □ *auf* RK; *und folglich* (4, 17.)

Vieleck auf VU: *Vieleck auf* FE = *Vieleck auf* FE: *Vieleck auf* RK.

5*tes Corollarium.*

Zieht man die Linie FD; *so sind die* △△ RKE *und* FDE *ähnlich, und folglich ist* KE:RK = FE:FD;

allein KE = $\frac{1}{2}$ FE; *folglich* RK = $\frac{1}{2}$ FD.

Daher wird das vorhergehende Corollarium das folgende:

VU:FE = FE:$\frac{1}{2}$FD, *das heißt in Worten:* „*die Seite eines in den Kreis beschriebenen Vielecks ist* „*zwischen der Seite eines um den Kreis beschriebenen* „*ähnlichen Vielecks, und der halben Seite eines eben-* „*falls in den Kreis beschriebenen Vielecks, welches* „*aber nur die halbe Anzahl Seiten des gegebenen Viel-* „*ecks hat, die mittlere Proportional-Linie.*“

Huigens de Circuli magnitudine, prop. 13.

6*tes Corollarium.*

Es erhellet weiter aus dem 4ten Corollarium, daß der Unterschied des Inhalts von dem um den Kreis beschriebenen regelmäßigen Vielecke und des Inhalts von dem in den Kreis beschriebenen ähnlichen Vielecke sich zu dem Inhalt des erstern Vielecks in der verdoppelten Verhältniß der Seite des Vielecks in dem Kreise zu dem Durchmesser verhält; denn da Vieleck auf VU: *Vieleck auf* FE = *Vieleck auf* FE: *Vieleck auf* RK; *so ist* (3, 8. N. 3.) *Vieleck auf* VU — *Vieleck auf* FE: *Vieleck auf* VU = *Vieleck auf* FE — *Vieleck auf* RK: *Vieleck*

eck auf FE *) $= \triangle$ RQE : $\triangle$ RCE $=$ QE : CE (4, 6.);

allein QE : RE $=$ RE : CE (4, 12. 2);

und RE : CE $=$ RE : CE;

folglich QE : CE $= \overline{RE}^2 : \overline{CE}^2$ (3, 10.); und folglich

Vieleck auf VU — Vieleck auf FE : Vieleck auf VU $= \overline{RE}^2 \overline{CE}^2 = \overline{FE}^2 : \overline{TE}^2$.

7tes Corollarium.

Folglich ist der genannte Unterschied einem ähnlichen Vielecke gleich, welches man um den Kreis beschreiben kann, dessen Durchmesser die Seite FE *des gegebenen Vielecks ist (9ter Lehrsatz).*

Du Fay Mem. de l'Acad. 1729. p. 297.

8tes Corollarium.

Folglich ist auch der genannte Unterschied dem Vielecke gleich, welches aus der Begegnung derjenigen Linien entsteht, die entweder die Endpunkte der parallelen Seiten des gegebenen Vielecks, wenn dieses eine gerade Anzahl Seiten hat, verbinden, oder die auf die Seiten senkrecht gezogen werden, wenn es eine ungerade Anzahl Seiten hat. (Siehe das vorhergehende und den 15ten und 16ten Lehrsatz im 2ten Buche); denn die Lothlinie ist in diesen Vielecken die halbe Sei-

*) Für Vieleck auf FE substituire $\triangle$ 2 CRE, für Vieleck auf RK substituire $\triangle$ CQR.

te des gegebenen Vielecks, und folglich der Halbmesser des in diese Vielecke beschriebenen Kreises.

Du Fay ibid. p. 229.

22ster Lehrsatz. 162ste Fig.

Läßt man von dem Mittelpunkte (C) *des Kreises auf die neben einander liegende Seiten* (NG, Ga) *eines um den Kreis beschriebenen regelmäßigen Vielecks* (NGa u. s. w.) *senkrechte Linien* (CI, CL) *niederfallen, zieht nach dem Winkel* (G), *welchen jene Seiten mit einander machen, einen Halbmesser* (CEG), *und theilt die Winkel* (ICG, GCL), *die dieser Halbmesser mit den genannten senkrechten Linien wechselseitig macht, vermittelst der Linien* (CX, CY), *welche man bis an die Seiten* (NG, Ga) *des Vielecks* (*nehmlich bis* X *und* Y) *verlängert, in zween gleiche Theile; so werden folgende Sätze Statt haben:*

1ster; die Linie (XY), *welche die Schnitt-Punkte verbindet, wird die Seite eines neuen um den Kreis beschriebenen Vielecks seyn, das aber eine doppelte Anzahl Seiten haben wird;*

2ter; Jede Seite (z. B. XY) *dieses neuen Vielecks verhält sich zu der Seite des gegebenen Vielecks, wie der Halbmesser* (CE) *des Kreises zu der Summe von dem Halbmesser des Kreises und von dem Halbmesser* (CG) *des gegebenen Vielecks;*

3ter; die Umkreise des neuen und gegebenen Vielecks verhalten sich zu einander, wie der Durchmesser des Kreises zu der Summe von dem Halbmesser des

Krei-

Kreises und von dem Halbmesser des gegebenen Vielecks;

4ter; *die beyden Vielecke stehen in Rücksicht ihres Inhalts in der nehmlichen Verhältniß.*

Beweis des 1sten Satzes. Aus der Gleichheit der △△CIX und CYL folgt, daſs CX=CY, IX =LY, und folglich XG=GY); woraus (1, 12. 3.) sich ergiebt, daſs CE ⊥ auf XY, und hierauf folgt aus △ICX=△XCE, daſs CE=CI; folglich berührt XY den Kreis in dem Punkte E, und ist IX=XE, und aus dem nehmlichen Grunde EY=LY.

— — *des 2ten Satzes.* Vermöge 4, 9., und der Zusammenzählung der Verhältnisse nach 3, 8. No. 1.

— — *des 3ten Satzes.* Indem man in Erwägung zieht, daſs der Umfang des gegebenen Vielecks gxIG, und der Umfang des neuen Vielecks 2gXIX oder XE ist.

— — *des 4ten Satzes.* Indem man in Erwägung zieht, daſs der Inhalt der Vielecke in zusammengesetzter Verhältniſs der Umkreise und Lothlinien (2, 17.) und daſs hier beyde Vielecke die nehmliche Lothlinie, nehmlich den Halbmesser des Kreises haben. (4, 7.)

1stes Corollarium.

Die Seite eines um den Kreis beschriebenen Vielecks ist kleiner, als die Seite eines ebenfalls um den Kreis beschriebenen Vielecks, das aber nur die halbe Anzahl der Seiten hat.

2tes Corollarium.

Der Umfang, oder der Inhalt jenes Vielecks ist auch kleiner, als der Umfang, oder der Inhalt von diesem Vielecke.

3tes Corollarium.

Die Seite eines um den Kreis beschriebenen Vielecks verhält sich zu der Seite eines in denselben beschriebenen Vielecks, dessen Anzahl von Seiten aber nur ein halbmahl so groß ist, wie der Halbmesser des Kreises zu der Summe von dem Halbmesser des Kreises und der Lothlinie dieses letztern Vielecks;

denn nach dem Lehrsatze ist

$IX : IG = CI : CI + CG = CK : CK + CE$; nun ist

$IG : KE = CI : CK$

folglich (nach 3, 10.)

$IX : KE = CI : CK + CE = XY : FE.$

4tes Corollarium.

Folglich verhält sich die Seite des Sechsecks um den Kreis zu der Seite des Dreyecks in dem Kreise, wie $R : R + \frac{1}{2} R = 2 : 3$, (8*ten Lehrsatzes* 3*tes Corollarium*).

Snellius prop. 7.

23ster *Lehrsatz.* 162ste Fig.

Ein in den Kreis beschriebenes Vieleck ist zwischen einem Vielecke in dem Kreis, und einem Vieleck um den Kreis, wenn nehmlich diese beyde leztern Vielecke nur die halbe Anzahl Seiten des erstern gegebenen Vielecks haben, eine mittlere Proportional-Figur; und das Vieleck um den Kreis ist zwischen dem in den nehmlichen Kreis beschriebenen ähnlichen Vielecke, und dem Vielecke um eben denselben Kreis, welches aber nur die halbe Anzahl Seiten hat, eine harmonisch mittlere Proportional-Figur.

Snellius pr. 9. in Rücksicht des 1stern Satzes.

Saurin Mem. de l'Acad. 1713. pr. 10. in Rücksicht des 2ten Satzes.

Beweis des 1stern Satzes. Construktion. Wenn IE die Seite des Vielecks in dem Kreise ist; so sind FE und NG die Seiten der Vielecke in dem und um den Kreis, welche nur die Anzahl Seiten haben, und folglich verhalten sich die drey Vielecks, wie $2\triangle ICE : \triangle FCE : \triangle NCG = \triangle ICIE : \triangle KCE : \triangle ICG$.

Beweis. $\triangle KCE : \triangle ICE = KQ : IP$
$= CK : CI$
$= CE : CG$,
$\triangle ICE : \triangle ICG = KE : IG = CE : CG$;
folglich
$\triangle KCE : \triangle ICE = \triangle ICE : \triangle ICG$, oder
Vieleck auf FE : Vieleck auf IE = Vieleck auf IE : Vieleck auf NG, W. z. B. W.

 Be-

Beweis des 2ten Satzes. Construktion. Werden NG und FE als die Seiten ähnlicher Vielecke um und in den Kreis angenommen; so wird tL = FD die Seite eines Vielecks seyn, welches die halbe Anzahl Seiten hat, und folglich ist, wenn man CL bis zur Berührungs-Linie NIA zieht, IH die halbe Seite des Vielecks um den Kreis, welches folglich die halbe Anzahl Seiten hat, und es verhalten sich also die Vielecke auf NG, FE und dem doppelten von IH, wie die △△ NCG, FCE und ICH

oder wie

das Stück ICLG, welches = △NCG ist, das △ ICL; welches = △FCE ist, und das △ICH.

Da nun drey Größen (nach der 22sten Erklärung des 3ten Buchs) *harmonisch* proportionell sind, wenn sich die erste derselben zu der dritten, wie der Unterschied der zwo ersten zu dem Unterschiede der zwo letztern verhält; so muss man beweisen, dass

△ ICL : △ ICH = das Stück ICLG — △ ICL : △ ICH — das Stück ICLG;

oder

△ICL : △ICH = △ILG : △LCH.

Beweis. △ICL : △ICH = CL : CH = CI : CH;
△ILG : △GLH = IG : GH = CI : CH
(4, 9.)

folglich

△ICL:

$\triangle ICL : \triangle ICH = \triangle ILG : \triangle GLH$, und folglich ist das Vieleck auf NG zwischen dem Vielecke auf FE und dem Vielecke auf dem Doppelten von IH eine *harmonisch*-mittlere Proportional-Figur.

Anmerkung. Folglich ist nach dem 1sten Satze, das Sechseck in dem Kreise (zum Beyspiel) zwischen dem Dreyecke um den Kreis und dem Dreyecke in dem Kreise eine mittlere Proportional-Figur; und das Sechseck um den Kreis zwischen dem Sechseck in dem Kreise und dem Dreyeck um den Kreis eine *harmonisch*-mittlere Proportional-Figur.

24ster Lehrsatz. 129ste Fig.

Beschreibt man ein regelmässiges Vieleck von einer geraden Anzahl Seiten in den Kreis, zieht durch zween einander gegenüber liegende Winkel den Durchmesser (AE), *eben so von dem Endpunkte* (E) *dieses Durchmessers nach dem Endpunkte* (B) *der an eben diesen Durchmesser gränzenden Seite* (AB) *die Sehne* (EB) *verbindet endlich die Seiten* (AB *und* AH, BC *und* HG *u. s. w.*), *welche in gleicher Entfernung von dem Durchmesser liegen, vermittelst gerader Linien* (BH, CG, DF), *die den Durchmesser alle unter einem rechten Winkel schneiden; so wird das Rechteck aus dem Durchmesser* (AE) *und der genannten Sehne* (BE) *dem Rechteck aus der Seite* (AB) *des Vielecks, und der Summe aller der Linien* (BH, GH, DF), *wodurch die Seiten des Vielecks verbunden worden sind, gleich seyn.*

Archimedes de Sphaera et Cylindro, pr. 21.

Con-

Construktion. Man ziehe die Linien CH, DH, DG u. s. w., die den Durchmesser in L, M, N, u. s. w. schneiden.

Beweis. Aus der Aehnlichkeit der Dreyecke ABE, ABK, LKH, LCM, MGN, NDO, OFE folgt die stetige Verhältniss-Gleichheit von BK : KA = HK : KL = CM : ML = GM : MN = DO : ON = FO : OE, und aus 3, 17. die Verhältniss-Gleichheit von BK : KA = die Summe aller vorhergehenden : der Summe aller folgenden Glieder *), und hieraus folgt nach 4, 7. 5. die Gleichheit der genannten Rechtecke.

1ste Anmerkung. Das Vieleck muss eine gerade Anzahl Seiten haben; denn sonst ist die Linie AE kein Durchmesser; auch wären im entgegengesetzten Falle die Linien BH, CG, DF nicht mit einander parallel; worauf sich doch die Aehnlichkeit der Dreyecke gründet.

2te Anmerkung. Ist dieser Lehrsatz überhaupt wahr; so ist er es auch in Rücksicht derjenigen regelmässigen Vielcke, die nicht nur eine gerade, sondern auch eine mit 4 vervielfältigte Anzahl Seiten haben. In solcher Rücksicht trägt *Tacquet* diesen *Archimedischen* Lehrsatz in seinen *Theoremata selecta ex Archimede* pr. 16. vor, weil er bloss den Fall enthält, dessen sich *Archimedes* selbst bedient, um den Inhalt einer

*) und BK : KA ist wegen △ ABK ∾ △ ABE; wie BE : AB.

ner Kugel zu bestimmen (2tes Cor. aus diesem Lehrsatze.) Siehe den 13ten Lehrsatz unseres 12ten Buchs.

25ster Lehrsatz 129ste Fig.

Beschreibt man ein regelmäßiges Vieleck von einer geraden Anzahl Seiten in ein Segment (DAF), *dessen Grundlinie* (DF) *auf dem Durchmesser senkrecht steht, und zieht die Sehne* (BE) *von dem Endpunkte einer an den Durchmesser gränzenden Seite des Vielecks an den Endpunkt dieses Durchmessers; so wird das Rechteck aus dieser Sehne und dem Theile* (AO) *des Durchmessers, der zwischen seinem andern Endpunkte* (A) *und jener begegnenden Grundlinie enthalten ist, dem Rechtecke aus einer Seite* (BA) *des Vielecks, und der Summe aller der Linien* (BK, CM, DO) *wodurch die Seiten des Vielecks auf die nehmliche Art, als nach dem vorhergehenden Lehrsatze, verbunden worden sind, gleich seyn.*

Archimedes de Sphaera et Cylindro pr. 25.

Construktion. Die des vorhergehenden Lehrsatzes.

Beweis. Aus der Aehnlichkeit der Dreyecke ABE, ABK, HKL, LCM, MGN, NDO ergiebt sich, dass AB : BE = AB : BK = LK : HK = LM : CM = MN : MG = NO : OD; woraus nach 3, 17. folgt, dass AB : BE = die Summe aller vorhergehenden : der Summe aller nachfolgenden Glieder sich verhält; und hieraus wird vermöge 4. 7. 5. die Gleichheit der genannten Vielecke geschlossen.

An-

Anmerkung. Die beyden Anmerkungen zu dem vorhergehenden Lehrſatze gelten auch für dieſen. Siehe den 14ten Lehrſatz des 12ten Buchs.

Corollarium.

In dem Beweiſe iſt geſagt, daß AB : BE = AK + KL + LM + MN + NO + OE (*wenn man den ganzen Kreis nimmt*) : BK + HK + CM + MG + DO + OF;

oder folglich

AB : BE = AE : 2 (BK + CM + DO).

Ich werde mich dieſes von *Vieta* (in Oper. p. 315.) vorgetragenen Satzes in §. 22. bedienen.

26*ſter Lehrſatz.* 162ſte Fig.

Beſchreibt man ein gleichſchenklichtes Dreyeck (FED) *in ein Segment* (FIELD), *und in jedes der Segmente, die von den Seiten* (FE, ED) *jenes Dreyecks* (FED) *gemacht werden, noch ein gleichſchenklichtes Dreyeck* (FIE, ELD); *ſo wird jenes erſtere Dreyeck* (FED) *kleiner, als das vierfache der beyden andern Dreyecke* (FIE, ELD) *zuſammengenommen ſeyn.*

Huigens de Circuli Magn. pr. 1.

Conſtruktion. Man ziehe die Linie IL, und ſodann die ſenkrechte EC; woraus folgt, daſs FE = ED = IL, und △ IEL = △ ELD = △ FIE iſt.

Beweis.

Beweis. □ auf FE : □ IE = ES : EP (5, 2. 2.);
nun ist II = IE, und FI + IE > FE (1, 14.);
folglich FE > 2 IE;
folglich □ auf FE : □ IE < 4 : 1;
folglich ES : EP < 4 : 1.

Eben so ist FD : IL (oder: FE) < 2 : 1;
folglich ES x FD : EP x IL < 8 : 1;
nun ist △FED : △IEL = ES . FD : EP . IL (4, 1.)
folglich △FED : △IEL < 8 : 1;
oder △FED < 8 △IEL;
und folglich △FED < 4 (△FIE + △ELD).

27ster Lehrsatz. 162ste Fig.

Beschreibt man in ein Segment (IEL), *das kleiner als der halbe Kreis ist, ein gleichschenklichtes Dreyeck* (IEL), *und sodann auf die nehmliche Grundlinie* (IL) *ein gleichschenklichtes Dreyeck* (IGL), *dessen Seiten* (IG, LG) *Berührungslinien der nehmlichen Kreisbogen* (IE, LE) *sind; so wird die Berührungs-Linie* (XEY), *welche man durch die Spitze* (E) *des erstern Dreyecks* (IEL) *ziehet, von dem letztern* (IGL) *ein Dreyeck* (XGY) *abschneiden, welches grösser als die Hälfte des erstern* (IEL) *seyn wird.*

Huigens de *vera Circuli Magn.* pr. 2.

Construktion. Man ziehe durch G und E die Linie GEC, welche folglich senkrecht auf IL fällt. (1, 11. 5.)

Beweis. △IGL : △IEL = GP : EP (4, 7, 1.)
= IG : IX (4, 2.) *)
△XGY :

*) Es sollte, so viel ich beurtheilen kann, heissen: (4, 1.)

$$\Delta XGY : \Delta IGL = \overline{GX}^2 : \overline{IG}^2;$$

folglich $\Delta XGI : \Delta IEL = \overline{GX}^2 : IX . IG.$

Nun ist $GX > IX$ und $> \frac{1}{2} IG$ (22sten Lehr. 1 Cor.)

folglich $\overline{GX}^2 > \frac{1}{2} IX . IG;$

und folglich $\Delta XGY > \frac{1}{2} \Delta IEL.$

2te Abtheilung.

Ueber diejenigen Vielecke, welche entstehen, wenn man in und aus andern Vielecken Diagonalen zieht.

28*ster Lehrsatz.* 144ste und 166ste Fig.

Man kann in allen Vielecken so viele Diagonalen, oder Linien, welche von einem Winkel nach den übrigen laufen, ziehen, als es, wenn g die Anzahl der Seiten ausdrückt, in der Zahl $\frac{g \times (g-3)}{2}$ *Einheiten giebt.*

Lexel, *Novi Commentarii Petropol.* T. XIX. p. 231.

Beweis. Die Figur hat g Winkel, folglich hat sie deren, wenn man A nicht mit zählt, $g - 1$; folglich kann man aus A nach den andern Winkeln $\overline{g-1}$ Linien AB, AD, AE, AF, u. s. w. aus dem zweyten Winkel B, $\overline{g-2}$ solcher *von den übrigen verschiedenen* Linien, namentlich BD, BE, BF u. s. w. ziehen; denn man rechnet nun die Linie BA, welche man schon aus A nach B gezogen hat, nicht mehr mit.

Aus

Aus dem dritten Winkel wird man $\overline{g-3}$ solcher Linien DE, DF, u. s. w. ziehen können. Dies geht immer so fort, bis man zu dem vorletzten Winkel gelangt, woraus man nur *eine* Linie wird ziehen können. Die Summe aller Linien ist folglich $\overline{g-1} + \overline{g-2} + \overline{g-3} + \overline{g-4} - - - + 1$; folglich ist sie die Summe einer arithmetischen Reihe, die $g-1$ Glieder hat, und folglich $= \frac{(\overline{g-1}+1)\times\overline{g-1}}{2}$ $= \frac{g\times\overline{g-1}}{2}$. Allein die g Seiten der Figur sind unter jenen Linien mit begriffen und nicht sie, sondern nur die übrige sind Diagonalen; die Anzahl der Diagonalen ist daher $\frac{g\times\overline{g-1}}{2} - g = \frac{g\times(g-3)}{2}$.

1stes Corollarium.

Man kann daher die Diagonalen, welche von jedem Winkel (A) *nach dem zweyten* (D), *oder dritten* (E), *oder vierten* (F) *u. s. w. Winkel laufen, die erste, zwote, dritte u. s. w. Diagonalen heißen.*

2tes Corollarium.

Ist nun das Vieleck ein regelmässiges Vieleck, und folglich in einen Kreis beschrieben, oder beschreibbar; so wird der Winkel, welchen jede der Seiten (AB) *des Vielecks mit der aus dem Endpunkte dieser Seite gezogenen ersten, zwoten, dritten u. s. w. Diagonale bildet, ein Winkel im Umkreise seyn, der auf dem von der Seite des Vielecks als Sehne begränzten, oder dem zwey-, drey-, vierfachen u. s. w. Bogen ruht. Dieser Bogen wird daher einem, oder*

zween, oder drey u. s. w. halben Mittelpunkts-Winkeln gleich seyn, das heißt, die m*te Diagonale wird mit der Seite, aus deren Endpunkte man sie gezogen hat, einen Winkel* $= \frac{m \times 2L}{g}$ (2, 14. 1.) *machen. Dieser Winkel wird folglich ein rechter Winkel seyn, wenn* $\frac{2m}{g} = 1$, *oder* $m = \frac{g}{2}$ *seyn wird.*

3tes *Corollarium.*

Allein die Winkel, welche von zwoen auf einander folgenden Diagonalen (AD *und* AE *zum Beysp.*) *gebildet worden, sind immer halbe Mittelpunkts-Winkel, und folglich jeder von ihnen* $= \frac{2L}{g}$; *folglich wird, da der Winkel, welchen zwo Seiten mit einander machen* $= \frac{\overline{g-2} \times 2L}{g}$ (2, 14. 1.) *ist, der Winkel, welchen die aus einem Winkel gezogene* m*te Diagonale mit der aus dem nehmlichen Winkel gezogenen Diagonale macht, nachdem man die einzelne Winkel vom Winkel der Seiten des Vielecks, von denen zunächst die Rede ist, abgezogen hat* $= \frac{g-\overline{2-(n+m)}\,2L}{g} = \frac{g-\overline{n+m+2}}{g}$ *seyn, und dieser Winkel wird folglich ein rechter Winkel seyn, wenn* $2g - 2n - 2m - 4 = g$, *oder* $\frac{g-4}{2} = n + m$ *seyn wird.*

4tes Corollarium.

Wenn man durch den Buchstaben n *die Zahl angiebt, worin eine Diagonale liegt* *); *so wird diese* nte *Diagonale mit der Seite, von welcher man zu zählen beginnt, und von welcher aus sie gezogen wurde, an einer Seite* $\overline{n+1}$ *Seiten des Vielecks die 1ste Diagonale namentlich* 2, *die* 3te 3, *und an der andern Seite* $g-(n+1)$ *Seiten als Sehne begränzen.*

5tes Corollarium.

Wenn also g *eine gerade Zahl bezeichnet, und* $g-n+1=n+1$, *oder* $g=2n+2$, *oder* $\frac{g-2}{2}=n$ *ist; so wird diese* nte *Diagonale durch den Mittelpunkt gehen; man wird zwischen der Seite, von welcher man zu zählen beginnt, und dem Mittelpunkte keine Diagonale einer höheren Ordnung ziehen können, und alle* nte *Diagonalen werden, wenn* n *immer* $=\frac{g-2}{2}$, *einander in dem Mittelpunkte* C *begegnen.*

Wäre aber $n<\frac{g-2}{2}$ *(unter der beständigen Voraussetzung,* n *sei eine gerade Zahl); so wird man, ehe man noch zu dem Mittelpunkte kömmt, Diagonalen von höheren Ordnungen ziehen können. Die Diagonalen der Ordnung* n *werden einander ausserhalb des Mittelpunktes begegnen, und daher vermittelst ihrer*

*) Man erlaube dem Uebersetzer diesen neuen Ausdruck. Die Worte im Original lauten: „Indien men door den „letter *n* uitdrukt, de *hoeveelste* diagonaal een diagonaal „is," u. s. w.

Begegnung verschiedene Vielecke bilden. Endlich wird die Zahl $\frac{g-2}{2} - 1$, *oder* $\frac{g-4}{2}$ *noch angeben, welches die Diagonalen der höchsten Ordnung seyn, die einander ausserhalb des Mittelpunkts schneiden.*

6tes Corollarium.

Ist aber g *eine ungerade Zahl; so kann keine Diagonale* (2, 14. 3.), *und folglich auch nicht die* n*te, namentlich diejenige Diagonale, welche an einer Seiten* $\overline{n+1}$, *und an der andern Seite* $g - \overline{n+1}$ *Seiten begränzt, durch den Mittelpunkt laufen. Wenn nun* n *die höchste Diagonale ist, welche man ziehen kann; so wird sie* $\overline{n+1}$ *und die folgende Diagonale wird an der andern Seite ebenfalls* $\overline{n+1}$ *Seiten begränzen. Es ist auch noch zwischen den zwoen Diagonalen eine Seite übrig, und folglich ist die Anzahl der Seiten, oder* $g = \overline{n+1} + \overline{n+1} + 1 = 2n + 3$, *folglich ist* $n = \frac{g-3}{2}$ *die höchste Diagonale, welche man zwischen einer Seite und dem Mittelpunkte ziehen kann, so die Anzahl* g *der Seiten eine ungerade Zahl ist.*

29ster Lehrsatz. 144*ste*, 154*ste*, 166*ste Figg.*

1*stens. Es werden alle Diagonalen, welche man in einem regelmäsigen Vielecke ziehen kann, durch ihre wechselseitige Begegnung so viele ähnliche Vielecke innerhalb dieses Vielecks bilden, als es, wenn die Anzahl* g *der Seiten eine ungerade Zahl ist, in der Zahl* $\frac{g-3}{2}$, *und als es, wenn die Anzahl* g *der Seiten eine gerade Zahl ist, in der Zahl* $\frac{g-4}{2}$ *Einheiten giebt;*

2tens. *Alle diese ähnliche Vielecke liegen um den Mittelpunkt des gegebenen Vielecks herum, und zwar liegt das erste in Rücksicht auf das gegebene umgekehrt, das zweyte in Rücksicht auf dasselbe ganz übereinstimmend. Das dritte in Rücksicht auf eben dasselbe umgekehrt, u. s. w. um den Mittelpunkt herum, nehmlich auf diese Art, daß die Linie, welche man durch die Spitze eines der Winkel und den Mittelpunkt ziehet, abwechselnd entweder durch die Spitzen der gegenüberliegenden Winkel, oder durch die parallele Seiten der entstandenen Vielecke (so die Anzahl der Seiten eine gerade Zahl ist) senkrecht geht; da diese Linie hingegen, (wenn die Anzahl der Seiten eine gerade Anzahl ist) durch die Spitze und senkrecht mitten durch die gegenüberstehende Seite irgend eines der Winkel läuft;*

3tens. *Endlich entsteht das erste dieser Vielecke durch die Begegnung aller ersten, das zwote durch die aller zwoten, das dritte durch die — aller dritten Diagonalen, u. s. w., welche man nehmlich aus jedem der Winkel ziehet.*

Beyspiele. 144ste Fig. In Rücksicht auf das Sechseck ist $\frac{g-4}{2} = 1$, und es wird ein Sechseck UPQRST innerhalb des gegebenen Sechsecks AB DEFG entstehen.

154ste Fig. In Rücksicht auf das Fünfeck ist $\frac{g-3}{2} = 1$, und es wird ein Fünfeck ONvxy innerhalb des Fünfecks CBEHK entstehen.

166ste Fig. In Rücksicht auf das Zehneck ist $\frac{g-4}{2} = 3$, und es werden innerhalb des Zehnecks

ABDEFHIKLG drey Zehnecke PQRSTVX YZU, abcdefghik, lmnopqrstu entſtehen. Ferner geht nach der 166ſten Fig. der Durchmeſſer BCl durch die Spitzen c und b des zweyten Vielecks; allein er geht immer ſenkrecht durch die Seiten PQ und XV des erſten, und die Seiten mn und sr des dritten Vielecks. Eben dieſer Durchmeſſer geht auch durch die Spitze B und die Seite KH des Fünfecks GBEHK, und durch die Seite ON und die Spitze x des Fünfecks ONvxy, wie in der 144ſten Figur zu ſehen.

Beweis des 1ſten Satzes. Es ſind ſo viele Claſſen von Diagonalen möglich, als die Zahl $\frac{g-4}{2}$, oder die Zahl $\frac{g-3}{2}$ Einheiten hat, je nachdem die Seiten-Anzahl eine gerade oder ungerade Zahl iſt (28ſten Lehrſatzes 5tes und 6tes Corollarium).

Nun bilden alle Diagonale von jeder Ordnung ein Vieleck von ſo vielen Seiten, als es Diagonalen der nehmlichen Ordnung in dem gegebenen Vielecke giebt, das heiſst, ſie bilden ein Vieleck von ſo vielen Seiten, als das gegebene Vieleck hat.

Folglich werden $\frac{g-4}{2}$, oder $\frac{g-3}{2}$ Vielecke entſtehen, je nachdem g eine gerade oder ungerade Zahl ſeyn wird. Dieſe Vielecke ſind regelmäſige Vielecke; denn es erhellet ganz deutlich, daſs (144ſte, 166ſte Figg.) $\triangle$ ABQ $=$ $\triangle$ QDE, und folglich $\triangle$ ABP $=$ $\triangle$ DRE, und folglich PQ $=$ QR, $<$ PQR $=$ $<$ ABD; u. ſ. w. in Rückſicht auf die Seiten und Winkel aller Dreyecke.

Beweis

— — *des 2ten Satzes.* Da (144ste Fig.) das △ BQD gleichschenklicht ist; so fällt der Punkt Q auf die Lothlinie, welche man aus Z oder mitten aus der Seite BD zieht, und die durch den Mittelpunkt läuft; folglich < PQC = < CQR und △ PCQ = QCR; folglich PC = CQ = CR; oder C ist der Mittelpunkt dieses Vielecks, und folglich auch der aller andern; woraus das Uebrige im 2ten Satze folgt.

— — *des 3ten Satzes.* Dieser Satz erhellet von selbst.

1stes Corollarium.

Ist die Seiten-Anzahl des gegebenen Vielecks eine ungerade Zahl; so bilden alle seine Diagonalen die neue Vielecke. Ist aber seine Seiten-Anzahl eine gerade Zahl; so sind alle diejenige Diagonalen, welche durch den Mittelpunkt laufen, zu der Bildung der neuen Vielecke unbrauchbar. Die Anzahl von solchen Diagonalen ist immer $\frac{n}{2}$. *Folglich sind in dem Sechsecke (nach der 144sten Fig.) drey Diagonalen* AE, BF, DG, *in dem Zehnecke (nach der 166sten Fig.) fünf Diagonalen* AH, BI, DK, EL, FG *unbrauchbar.*

2tes Corollarium.

Man kann die Größe der Seiten und Lothlinien von allen den Vielecken, wovon bißher die Rede war, so wohl in Beziehung auf einander selbst, als in Beziehung auf das gegebene Vieleck angeben, wenn man

nehmlich hier die Lehre voraus annimmt, die ich im 8ten Buche vortragen werde.

Ist nehmlich (166ste Fig.) die Anzahl der Seiten eine gerade Zahl; so ist die Lothlinie Cz der *Sinus* des Winkels EGF, welcher die Hälfte vom Mittelpunkts-Winkel ECF macht.

Die Lothlinie $C\alpha$ ist der *Sinus* des Winkels DGF $=\frac{3}{2}$ Mittelpunkts-Winkel; die Lothlinie $C\beta$ ist der *Sinus* des Winkels BGF, welcher $\frac{5}{2}$ Mittelpunkts-Winkeln gleich ist; und die Lothlinie $C\gamma$ ist der *Cosinus* des Winkels $GC\gamma$, der dem $\frac{1}{2}$ Mittelpunkts-Winkel gleich ist.

Nennt man nun das *innerste* Vieleck das 1ste, und hierauf alle übrige in ihrer Ordnung, das 2te, 3te, u. s. w.; so hat man folgende Verhältniss-Gleichheit:

Die Lothlinie des 1sten; die Lothlinie des 2ten; die Lothlinie des 3ten; die Lothlinie des 4ten Vielecks; u. s. w. — — — — zur Lothlinie des gegebenen Vielecks = der *Sinus* $\frac{1}{2}$ Mittelpunkts-Winkel; des *Sinus* $\frac{2}{2}$ Mittelpunkts-Winkel; der *Sinus* $\frac{3}{2}$ Mittelpunkts-Winkel; der *Sinus* $\frac{4}{2}$ Mittelpunkts-Winkel; u. s. w. — — — — zum *Cosinus* $\frac{1}{2}$ Mittelpunkts-Winkel.

Ist aber die Seiten-Anzahl ungerade; so ist $<$ EGF $=\frac{1}{2}<$ EGH $=\frac{1}{4}<$ ECH $=\frac{1}{4}$ Mittelpunkts-Winkel; sodann BGF $=3$ EGF $=\frac{3}{4}$ ECH $=\frac{3}{4}$ Mittelpunkts-Winkel; u. s. w. indem die Winkel nehm-

nehmlich immer um einen $\frac{1}{2}$ Mittelpunkts-Winkel zunehmen, und folglich verhält sich:

Die Lothlinie des 1sten; die Lothlinie des 2ten; die Lothlinie des 3ten Vielecks; u. s. w. — — — — zur Lothlinie des gegebenen Vielecks = der *Sinus* $\frac{1}{4}$ Mittelpunkts=Winkel; der *Sinus* $\frac{3}{4}$ Mittelpunkts-Winkel; der *Sinus* $\frac{5}{4}$ Mittelpunkts=Winkel; u. s. w. — — — — zum *Cosinus* $\frac{1}{2}$ Mittelpunkts-Winkel.

Die Seiten oder Umkreise stehen in einer und derselben Verhältniss (9ter Lehrsatz; und 4, 18.)

3tes *Corollarium.*

Ist die Seiten-Anzahl gerade; so entsteht das innerste, nehmlich dasjenige Vieleck, welches dem Mittelpunkte am nächsten liegt, aus Diagonalen von der Ordnung $\frac{g-4}{2}$ *(28sten Lehrsatzes 5tes Corollarium). Folglich macht jede dieser Diagonalen auf der Seite, woraus man sie zieht, einen Winkel* = $\frac{(g-4)2}{2g}$ < = $\frac{g-4}{g}$ <, *und da die zwo zunächst aneinander liegende Seiten* (AB, BD,) *eines Vielecks mit einander einen Winlel* = $\frac{(g-2)2}{g}$ < (2, 14. 1.) *machen; so werden folglich diese Diagonalen mit der zwoten von den beyden Seiten* (BD) *einen Winkel* = $\frac{(g-2)2}{g}$ < — $\frac{(g-4)}{g}$ < = < *bilden. Daher sind die Diagonalen, welche das innerste Vieleck bilden, gerade diejenige Diagonalen, welche auf den Veiten, auf welchen man sie gezogen hat, senkrecht stehen. Sie verbinden folg-*

 lich

lich die parallel liegende Seiten. Das innerste Vieleck ist also das nehmliche, wovon ich in 2, 15. und dem 7ten Corollarium des 2ten Lehrsatzes in diesem Buch in Nachfolge von Herrn Du Fay geredet habe. Es ist der Unterschied zwischen dem in den Kreis und zwischen den um dem Kreis beschriebenen regelmäsigen Vielecke. Siehe des 21sten Lehrsatzes 8tes Corollarium. Eben dies erhellet auch aus im vorhergehenden Corollarium Gesagten; denn die Lothlinie jenes innersten Vielecks ist dem S i n u s ½ Mittelpunkts-Winkel; folglich der halben Sehne des Mittelpunkts-Winkels, das heißt, der halben Seite des gegebenen Vielecks gleich.

30ster Lehrsatz. 144ste, 166ste Figg.

Ist die Seiten-Anzahl eines regelmäsigen Vielecks gerade, und verbindet man die zwo zunächst liegende Seiten mit Diagonalen und zwar mit Diagonalen der ersten Ordnung; so werden zwey gleiche und ähnliche Vielecke entstehen, welche die halbe Seiten-Anzahl des gegebenen Vielecks haben.

Beispiele. Auf diese Art bilden sich in dem Sechsecke nach der 144sten Fig. zwey gleichseitige Dreyecke A D F, B E G, und in dem Zehnecke nach der 166sten Fig. zwey Fünfecke ADFILA und BEHKGB.

Beweis. Nimmt man irgend einen Winkel B für den ersten Winkel an; so werden die aus diesem ersten Winkel B nach dem dritten Winkel E, aus diesem dritten Winkel E nach dem fünften H (u. s. w. bis man zu dem ersten Winkel zurückkömmt) gezogene

zogene Diagonalen ein regelmäſiges Vieleck von der halben Seiten-Anzahl bilden.

Zieht man von dem zweyten Winkel D nach dem vierten Winkel F, von dieſem vierten Winkel F nach dem ſechſten Winkel I, u. ſ. w. Diagonalen; ſo wird ebenfalls ein gleiches und ähnliches Vieleck entſtehen.

Allein die Diagonalen des dritten Winkels E nach dem fünften Winkel H, die — des fünften nach dem ſiebenten u. ſ. w., gehören ſchon zu dem erſten; die Diagonalen des vierten Winkels nach dem ſechſten, die — des ſechſten nach dem achten u. ſ. w., gehören ſchon zu dem zweyten Vielecke. Es können folglich nur zwey ſolche Vielecke entſtehen.

Anmerkung. Es ergiebt ſich von ſelbſt, warum ich in dieſem Lehrſatze *von einer geraden Anzahl Seiten* rede; denn in einem Vielecke *von einer ungeraden Anzahl* Seiten kann durch Ziehung von Diagonalen kein neues Vieleck entſtehen.

1ſtes Corollarium.

Die Seiten beyder Vielecke, wovon die Rede iſt, liegen in der nehmlichen Richtung der Seiten vom erſten innern Vielecke P Q R S T V X Y Z U, *von welchem im* 29*ſten Lehrſatze gehandelt wurde. Doch liegen ſie in dieſer Richtung nach einer beſtimmten Abwechslung. Die erſte, die dritte, die fünfte, u. ſ. w. dieſer leztern Seiten, oder* P Q, R S, T V, *u. ſ. w. werden nehmlich*

lich zu dem ersten, und die zwote, vierte, sechste u. s. w. QR, ST, VX *u. s. w. zu dem zweyten Vielecke gehören.*

2tes Corollarium.

Die Seiten dieser beyden Vielecke sind daher bloße Verlängerungen der Seiten des innern Vielecks, so daß ihre Winkel von der wechselseitigen Begegnung der verlängerten der Zahl nach geraden Seiten und der der Zahl nach verlängerten ungeraden Seiten des innern Vielecks gebildet werden.

3tes Corollarium.

Vermittelst der Verlängerung der Seiten wird man alle innere Vielecke, welche auf die im 19ten Lehrsatze angegebene Art entstanden sind, in zwey regelmäßige Vielecke, welche die Hälfte der Seiten-Anzahl vom gegebenen Vieleck haben werden, verändern können; und da die Seiten dieser neuen Vielecke die Verlängerungen der Seiten der innern Vielecke sind, woraus sie entstanden; so sind sie auch Theile der zwoten Diagonalen für die Vielecke und aus dem zwoten innern Vieleck entstandenen, Theile der dritten Diagonalen, für die Vielecke, und aus dem dritten innern Vieleck entstanden, u. s. w.

4tes Corollarium.

Der Winkel, welchen die mte *mit der ersten Diagonale aus dem nehmlichen Winkel macht, ist (28sten Lehrsatzes 2tes Corollarium)* $= \overline{m-1} \times \frac{2L}{g}$ *dieser Winkel*

kel wird folglich ein rechter Winkel seyn, wenn $\frac{\overline{m-1}\times 2}{g} = 1$, *oder* $m = \frac{g+2}{2}$ *ist. Nun ist die erste Diagonale in dem Falle, wovon hier die Rede ist, die Seite des neuen Vielecks. Folglich ist jene* m*te Diagonale, wenn* $m = \frac{g+2}{2}$ *ist, die von dem Endpunkte der Seite des neuen Vielecks auf ihr errichtete Lothlinie.*

5tes Corollarium.

Ist die Seiten-Anzahl eines Vielecks zwar gerade, ihre Hälfte aber ungerade (welches z. B. der Fall des Zehnecks ist); so wird das neue Vieleck (z. B. das Fünfeck GBEHK) *eine ungerade Seiten-Anzahl haben. Die genannte* m*te Diagonale des ersten Vielecks wird, wenn* $m = \frac{g+2}{2}$ *(die sechste Seite für das Zehneck) ist, die auf der Seite des neuen Vielecks errichtete Lothlinie seyn, welche das innere ähnliche Vieleck* ($\delta \xi \vartheta \lambda \varphi$), *wovon ich im 16ten Lehrsatze des 2ten Buchs, und im 8ten Corollarium des 21sten Lehrsatzes von diesem Buche in Nachfolge des Herrn Du Fay gesprochen habe, machen hilft, und wovon das Vieleck der Unterschied zwischen dem um den Kreis beschriebenen Vielecke von einer ungeraden Seiten-Anzahl, und dem in den Kreis beschriebenen ähnlichen Vielecke gleich ist (21sten Lehrsatzes 6tes, 7tes, 8tes Corollarium). Da man aber aus einem Winkel* $\overline{g-3}$ *Diagonalen ziehen kann; so werden noch* $g - 3 - \frac{g+2}{2}$, *das heißt* $\frac{g-8}{2}$ *Diagonalen übrig bleiben, und fängt man von der andern Seite, wie ich es bisher gethan habe, zu zählen an; so ist folglich die genannte Diagonale die* $\frac{g-8}{2} + 1$, *oder die* $(\frac{g-6}{2})$ *te. Hat*

man

man daher ein Vieleck von einer ungeraden Seiten-Anzahl, nimmt an, es sey in einen Kreis beschrieben und macht vermittelst der Vertheilung der Bogen in zween gleiche Theile aus diesem Vieleck ein Vieleck von einer doppelten Seiten-Anzahl; so werden die $\left(\frac{s-6}{2}\right)$ *te Diagonalen dieses neuen Vielecks vermittelst ihrer Begegnungen ein ähnliches Vieleck bilden, dessen Seiten, wie in diesem Lehrsatze angegeben worden ist, durch ihre Verlängerung zwey Vielecke geben werden, die dem ersten gegebenen ähnlich, einander, und über dies dem Unterschiede gleich seyn werden, welcher zwischen dem gegebenen Vielecke und dem um den Kreis beschriebenen ähnlichen Vielecke Statt findet, welches ich eben nach Herrn Du Fay behauptet habe.*

1ste Anmerkung. Man sieht hiebey, dass der von Herrn *Du Fay* vorgetragene Lehrsatz für die ungerade Vielecke nur ein Corollarium seines Lehrsatzes in Rücksicht auf gerade Vielecke ist, und dass es dabey gerade darauf ankömmt, dass in dem gegebenen ungeraden Vielecke nicht bloss ein Vieleck, welches der Fall bey geraden Vielecken ist; sondern zwey Vielecke entspringen, wodurch der Forderung Genüge geschieht. Man könnte sogar die beyden Lehrsätze mit den nehmlichen Worten ausdrücken; denn die Linien, wodurch die parallele Seiten der Vielecke von einer geraden Anzahl Seiten verbunden werden, stehen auf diesen Seiten senkrecht; der allgemeine Lehrsatz wird daher auf folgende Art ausgedrückt: „Zieht man aus „jedem der Winkel eines regelmässigen Viel„ecks auf die Seiten Lothlinien; so werden „die-

„dieſe Lothlinien durch ihre wechſelſeitige Be-
„gegnung ein neues regelmäſsiges und mit dem
„gegebenen Vielecke ähnliches Vieleck bilden,
„wenn die Anzahl Seiten des gegebenen Viel-
„ecks gerade iſt. Iſt aber die Anzahl der Sei-
„ten des gegebenen Vielecks ungerade; ſo wer-
„den jene Lothlinien zwey gleiche und ähnli-
„che Vielecke beſchreiben."

2te *Anmerk.* Es verſteht ſich von ſelbſt, daſs jedes der neuen Vielecke von Diagonalen wieder getheilt werden kann.

31ſter *Lehrſatz.*

Verlängert man wechſelsweiſe die Seiten eines regelmäſsigen Vielecks, *und verbindet die Punkte, worinnen die verlängerte* Seiten *einander begegnen, durch Linien; ſo werden dieſe Linien ſo viele regelmäſsige, dem gegebenen ähnliche, und um den nehmlichen Mittelpunkt beſchriebene* Vielecke *bilden, als die Zahl* $\frac{g-4}{2}$, *wenn die Seiten-Anzahl des gegebenen* Vielecks *gerade iſt, oder als die Zahl* $\frac{g-3}{2}$, *wenn ſeine Seiten-Anzahl ungerade iſt, Einheiten haben wird.*

Beyſpiele. Bey dem Fünfecke ONvxy in der 154ſten Eig. entſtehen nach dem vorgeſchriebenen Verfahren die Punkte CBEHK, die die Punkte eines Fünfecks abgeben. Bey dem Sechsecke UPQRST in der 144ſten Fig. entſtehen durch die Verlängerung der Seiten UP und QR, PQ und RS, QR und ST, RS und TU, TS und UP, UT und PQ die Punkte B, D, E, F, G, A, die ein neues Sechseck machen.

chen. Auf ähnliche Art entstehen aus dem gegebenen Zehneck lmnopqrstu nach der 167sten Figur drey Zehnecke. Es entsteht nehmlich durch die Verlängerung der Seiten lm und no, mn und op, no und pq u. s. w., indem man immer eine zwischen zwoen Seiten vernachläßsigt, das Zehneck aNbvcx dyeo; durch Verlängerung der Seiten lm und op, nm und pq, no und qr u. s. w., indem man immer zwo Seiten zwischen zwoen Seiten vernachläßsigt, das Zehneck MSTVUXPYRQ; zuletzt durch Verlängerung der Seiten mn und qr, no und rs, op und st u. s. w., indem man immer drey Seiten zwischen zwoen Seiten vernachläßsigt, das Zehneck EFHIKLGABD.

Beweis des 1sten Theils vom Lehrsatze. Die zwo einander gegenüber liegende einander parallele Seiten eines regelmäßsigen Vielecks sind durch die Anzahl $\frac{g-2}{2}$ Seiten von einander getrennt. So weit man auch diese Seiten verlängere; so können sie niemals zusammentreffen. Folglich wird eine von ihnen nur mit $\frac{g-2}{2}-2$, das heißst, nur mit $\frac{g-4}{2}$ verlängerten Seiten zusammentreffen können. Es entstehen daher nur $\frac{g-4}{2}$ Vielecke.

Beweis des 2ten Theils vom Lehrsatze. Nimmt man in einem Vielecke, dessen Anzahl Seiten ungerade ist, nach Belieben eine Seite an; so sind zwischen ihr und dem ihr gegenüberliegenden Winkel $\frac{g-1}{2}$ Seiten enthalten. Folglich wird die angenommene

mene Seite, wenn man sie verlängert, mit $\frac{g-1}{2} - 1$ oder $\frac{g-3}{2}$ verlängerten Seiten zusammentreffen, und es werden daher aus diesem Zusammentreffen die Winkel eben so vieler Vielecke entstehen. Alle diese Vielecke werden regelmäſsig und um den nehmlichen Mittelpunkt beschrieben seyn.

1ste Anmerkung. Die äussern Vielecke, welche auf die angezeigte Art aus dem gegebenen Vielecke entstanden, sind, das letztere ausgenommen, nicht die nehmlichen aus diesem auf die im 30sten Lehrsatze angegebene Art durch das Zeichen von Diagonalen gebildete Vielecke. Es sind also nach der 167sten und 166sten Fig. lmnopqrstu und ABDEFHIKLG dieselbe Vielecke. Allein in der 167sten Figur im zweyten Zehneck aNbvexdyeO stimmen dennoch die Punkte N, v, x, y, O mit den Punkten überein, welche in der 166sten Figur mit den nehmlichen Buchstaben bezeichnet sind. Auch kann man die Linien, welche die in der 167sten Figur mit Q, M, S, T, V u. s. w. bezeichnete und das dritte Zehneck bestimmende Punkte erzeugen, in der 166sten Figur leicht unterscheiden. Um dies deutlicher zu erkennen zu geben, habe ich die Winkel, die durch das Zusammentreffen dieser Linien entstehen, mit stärkern Punkten abgebildet.

2te Anmerkung. Verbindet man die Punkte, worin die verlängerte Seiten einander begegnen,

 nicht

nicht durch Linien; ſo werden ſie die Scheitelpunkte regelmäſsiger, ſternartiger, um das gegebene Vieleck beſchriebener Figuren vorſtellen, deren Seiten die verlängerten Seiten des Vielecks machen.

Sie-

Siebentes Buch.

Ueber den Kreis, und den Inhalt des Kreises.

1ste Abtheilung.

Ueber die Gränzen der Grössen und Verhältnisse.

Vorbericht.

Ich halte es für nothwendig, dass ich, ehe ich zur Behandlung des Haupt - Gegenstandes von diesem Buche schreite, und ihn nach strengen mathematischen Grundsätzen vortrage, einige Worte über diese Grundsätze selbst, nehmlich über die Lehre der *Limiten* oder *Gränzen* veränderlicher Grössen sage; wäre es mir auch nur darum zu thun, dass ich den von vielen neuern Mathematikern vorgetragenen

falſchen Begriffen und ganz mangelhaften Beweiſen entgegen arbeitete. *Maclaurin* behandelte die Lehre der *Gränzen* nach Art der Alten, vorzüglich der des *Archimeds*, in der Einleitung zu ſeinem Werke über die *Berechnung der Fluxionen*. *L'Alembert* erklärte die Sache ſehr richtig in der *Encyclopédie* bey dem Worte *Limite*, und in ſeinen *Melanges*. T. V. S. 239. Man kann auch *La Chapelle's Inſtitutions de Géometrie* T. II. §§. 433. und ff. nachſehen. Allein niemand hat dieſe Materie genauer und vollſtändiger behandelt, als *L'Huilier* in ſeiner Expoſition des principes des Calculs ſupérieurs, Chap. 1. *) Auch hat *Newton* beym Anfange ſeiner *Elementen* bereits einige Lehrſätze hierüber vorgetragen. Ich werde von allen dieſen Verfaſſern dasjenige, was ich von äuſſerſter Wichtigkeit und ganz unmittelbar zu meiner Abſicht nothwendig halte, entlehnen und es in der gehörigen Ordnung vortragen.

1ſte

*) Dieſe Preisſchrift arbeitete dieſer mir werthe und verdienſtvolle Verfaſſer während ſeines letztern Aufenthalts bei meinem verehrungswürdigen Lehrer, Hr. Pr. Pfleiderer in Tübingen, um, und gab dies Werk in lateiniſcher Sprache, unter dem Titel heraus: Principiorum Calculi Differentialis et Integralis Expoſitio elementaris ad normam Diſſertationis ab Academia Scient. Reg. Pruſſica anno 1786. praemii honore decoratae elaborata auctore *Simone L'Huilier*, Academiae Scient. Regiae Pruſſicae et Societatis Regiae Londinenſis Socio, Academiae Imperialis Petropolitanae Correſpondente. (Hr. L'Huilier nahm ſeinen Ruf nach Leiden nicht an, und iſt nun Prof. der Mathematik zu Genf.) Tubingae ap. J. G. Cottam. 1795.

1ste Erklärung.

Nähert sich irgend eine Grösse A einer andern Grösse L je länger je mehr, vermittelst einer Vermehrung oder Verminderung, ohne dass sie jedoch dieser Grösse jemals gleich würde oder sie überträfe; so sagt man von dieser zwoten Grösse L, sie sey die Gränze jener ersten Grösse A, und zwar sagt man von ihr, sie sey die Gränze der Grösse nach, wenn sich die Grösse A der Gränze L vermittelst einer Vermehrung, sie sey die Gränze der Kleinheit nach, wenn sich diese ihr vermittelst einer Verminderung je länger je mehr nähert.

1stes Corollarium.

Da sich die Grösse A der Grösse L oder ihrer Gränze auf dem Wege einer beständigen Vermehrung oder Verminderung immer mehr nähert; so folgt hieraus, daß man sie dergestalt vermehren oder vermindern kann, daß sie von ihrer Gränze um weniger, als irgend eine mögliche gegebene Grösse, man mag diese so klein als nur möglich annehmen, verschieden seyn wird.

Beyspiele.

1stes Beyspiel. Die Berührungslinie AB ist die Gränze der Kleinheit nach aller Schnittlinien AF, AD u. s. w., welche man aus einem und demselben Punkte A zu dem hohlen Umkreis ziehen kann, und die Gränze der Grösse nach aller Linien AE, AK u. s. w., welche blos an den geschwollenen Umkreis laufen.

Anmerk. Man könnte, zwar in uneigentlichem Sinne, sagen, die Mittellinie sey die *Gränze der Grösse nach* von allen Sehnen, würde sie selbst nicht im eigentlichen Sinne zu den Sehnen gerechnet werden müssen, und folglich eine Sehne seyn, welcher eine andere *Sehne, die Sehne bleiben würde*, gleich gemacht werden könnte. Dies ist im Begriffe von *Gränze* nicht enthalten, oder kann nicht darin enthalten seyn; da die Schnittlinien nach dem obigen Beyspiele hingegen, so lange sie Schnittlinien sind, der Berührungslinie AB nicht gleich kommen können.

2tes Beyspiel. Der Bruch $\frac{1}{3}$ ist die Gränze der Grösse nach von dem Bruche 0,33333333 und so weit man diesen Bruch ausgedehnt haben will.

3tes Beyspiel. Die Zahl 1 ist die Gränze der Grösse nach von folgender geometrischer Reihe:

$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+$ *u. s. w., soweit man diese Reihe verlängern will.*

Anmerkung. Ueberhaupt ist der Ausdruck $S = \frac{A(q^n-1)}{q-1}$ (3, 17. 1.) in der That die Summe einer Anzahl n Glieder von einer geometrischen Reihe, und $S = \frac{A}{1-q}$ ist die Gränze der ganzen abnehmenden Reihe, so weit man dieselbe verlängern will. Daher der Ausdruck einiger Schriftsteller, dass $\frac{A}{1-q}$ die Summe einer

ner *unendlichen* Anzahl Glieder von einer abnehmenden geometrischen Reihe seye. Hieraus ergiebt sich

1stens, dass man, da in der angeführten Reihe $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$ u. s. w. das erste Glied $\frac{1}{2}$, und der *Quotient* $\frac{1}{2}$ ist, $A = \frac{1}{2}$, $q = \frac{1}{2}$, folglich $1 - q = \frac{1}{2}$, und $S = \frac{A}{1-q} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$, und

2tens in der Reihe $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64}$ u. s. w. $A = 1$, $q = \frac{1}{4}$, folglich $S = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}$ haben wird.

4tes Beyspiel. Die mittlere arithmetische Proportional-Zahl ist *die Gränze der Kleinheit nach* von der mittlern geometrischen Proportional-Zahl zwoer Grösen (3, 20.).

2te Erklärung.

Nähert sich die Verhältniß zwoer Grösen der beständigen Verhältniß, welche zwischen zwoen andern Größen Statt findet, auf dem Wege der Vermehrung oder Verminderung immer mehr; so nennt man diese letztere Verhältniß die Gränze der Größe oder der Kleinheit nach von jener erstern Verhältniß.

Beyspiel. Die Verhältniss von $\sqrt{2} : 1$ ist die Gränze der Grösse nach von allen Zahlen, wodurch man die Verhältniss, worin die Diagonale eines Quadrats zu seiner Seite steht, ausdrücken kann. Die Verhältniss $2 : \sqrt{3}$ ist die Gränze der Grösse nach von den Zahlen, wodurch man die Verhältniss der Seite eines gleichseitigen Dreyecks zu seiner

Lothlinie ausdrücken kann. Die Verhältniſs von $\sqrt{3}:1$ iſt die Gränze der Verhältniſs, worin die Seite des in den Kreis beſchriebenen gleichſeitigen Dreyecks zu dem Halbmeſſer des Kreiſes ſteht, wenn man dieſe Verhältniſs in Zahlen ausdrückt. Siehe D' Alembert's Melanges. Tom. V. S. 215.

1ſter Lehrſatz.

Sind zwo Gröſsen A und B gegeben, und zieht man von der gröſsten derſelben die Hälfte, oder mehr als die Hälfte, und von dem Ueberreſte abermals die Hälfte, oder mehr als die Hälfte, und ſo weiter, immer auf die nehmliche Art ab; ſo wird am Ende eine kleinere Gröſse, als die zwote gegebene Gröſse B übrig bleiben.

Eukl. 10, 1., oder bey *König Lehrſatz* für 12, 2, und in gewiſſer Art bey *Tacques* 2ter *Lehrſatz* nach 6, 11.

Corollarium.

Man kann folglich keine noch ſo kleine Gröſse angeben, daſs nicht am Ende ein geringerer Reſt hervorgebracht werden könnte.

2ter Lehrſatz.

Sind zwo Gröſsen gegeben, wovon die eine (L) beſtändig, die andere (A) veränderlich iſt, dieſe ſich aber dennoch jener auf dem Wege der Vermehrung oder Verminderung immer mehr nähern, und daher von ihr um weniger als irgend eine gegebene Gröſse verſchieden ſeyn kann; ſo wird die Gleichheits-Ver-

hält-

hältniſs die Gränze der Gröſse oder Kleinheit nach von der Verhältniſs dieſer beyden Gröſsen ſeyn, und umgekehrt.

L'Huilier §. 2. *) — *Tacquet* Theor. ſel. ex Archimede prr. 1. 2. **)

Beweis. Nimmt man das Gegentheil an, und ſezt L = A + B; ſo iſt der Unterſchied zwiſchen den beyden Gröſsen einer beſtimmten Zahl gleich. Dies widerſpricht der Bedingung, nach welcher man dieſen Unterſchied kleiner als irgend eine gegebene Zahl angenommen hat.

*) Sit quantitas aliqua data limes quantitatis mutabilis creſcentis vel decreſcentis. Utrisque illarum addatur, aut ab utraque ſubtrahatur eadem aliqua quantitas. Prior ſumma, aut prior differentia, limes etiam erit poſterioris ſummae, aut differentiae, creſcentis vel decreſcentis. Si vero utraque quantitas ab aliqua eadem quantitate ſubtrahatur: prius reſiduum limes erit poſterioris decreſcentis vel creſcentis.

**) Datae ſint figurae quaecunque, ſeu planae ſeu ſolidae, A. B. Sint autem magnitudines aliae ſemper atque aliae, quae figuras datas A ac B ſemper minus ac minus excedendo, in ipſas deſinant, et tamen ſemper inter ſe aequales ſint. Dico etiam, figuras A et B aequales eſſe. — — Datae ſint figurae A et B: ſint autem magnitudines aliae ſemper atque aliae, quae a figuris datis ſemper minus ac minus deficiendo, in ipſas deſinant, et ſemper inter ſe aequales ſint. Dico etiam figuras datas A, B, aequales fore.

1ste Anmerk. Dies wird der Lehrer durch eine nähere Zergliederung der Beyspiele von der 1sten E klärung deutlicher zu machen suchen.

2te Anmerk. Daher kömmt es, dass einige mathematische Schriftsteller sagen, eine Grösse *endige* in ihrer Gränze.

3ter Lehrsatz.

Wenn eine und dieselbe Grösse (L) *die Gränze der Grösse oder Kleinheit nach von andern Grössen* (*z. B.* A *und* B) *ist; so ist die Gleichheits-Verhältniss die Gränze der Verhältniss dieser Grössen.*

Beweis. Die Verhältniss von A : L ist am Ende die Gleichheits-Verhältniss, oder A : L = 1 : 1 (2ter Lehrsatz), und eben so B : L = 1 : 1; folglich am Ende A : B = 1 : 1, oder die Verhältniss von A : B nähert sich der Gleichheits-Verhältniss immer mehr.

Beyspiel. Die Gränze der Verhältniss von den beyden Reihen: $\frac{2}{3}+\frac{1}{10}-\frac{2}{3}+\frac{1}{10}$ u. s. w. und $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}$ u. s. w. sie mögen so weit, als man will, fortgesetzt werden, ist die Gleichheits-Verhältniss.

Anmerk. Daher entstand der Ausdruck, dessen sich einige mathematische Schriftsteller bedienen, dass die *letzte Verhältniss* jener Grössen eine Gleichheits-Verhältniss sey.

4ter

4ter Lehrsatz.

Sind zwo Grössen beyde die Gränzen einer dritten Grösse; so ist ihre Verhältniss die Gleichheits-Verhältniss, das heisst, sie sind einander gleich.

Beweis. Vermöge des 3ten Lehrsatzes.

La Chapelle §. 433.

5ter Lehrsatz.

Stehen zwo Grössen A *und* B *beyde in ihrer Vermehrung oder Verminderung immer in einer und derselben Verhältniß* (a : b) *zu einander; so wird diese Verhältniß ebenfalls die Verhältniß ihrer Gränzen* (L *und* l) *seyn.*

Tacquet Porisma nach 12, 2. — *Maclaurin* p. VI. — *L L'Huilier* §. 3.

Beweis. Es seyn A : B = a : b. Wenn nun
nicht L : l = a : b;
so ist L : l entweder > oder < a : b.
Es sey L : l > a : b;
und folglich L — X : l = a : b = A : B.

Sind nun L und l die Gränzen der Grösse nach von A und B; so ist B < l. Folglich müste auch A immer kleiner als L — X seyn *); folglich sich L um weniger als eine gegebene Grösse X nähern. Dies widerspräche dem Begriffe, welchen man sich von einer *Gränze* macht. Folglich ist nicht L : l > a : b.

Es

*) 3. 9.

Es sey $L:l < a:b$;
folglich $L:l - X = a:b = A:B$.

Nun ist $A < L$. Folglich müsste B auch immer kleiner als $l - X$ seyn. Dies wäre ebenfalls dem Begriffe, den man von einer *Gränze* angenommen hat, zuwider.

Nun ist aber weder $L:l < a:b$,
noch $L:l < a:b$;
folglich ist $L:l = a:b$.

Bezeichnen L und l die Gränzen der Kleinheit nach; so bedient man sich der nehmlichen Schlussart. Man setzt in dem ersten Falle:
Wenn $L:l > a:b$;
so ist $L:l + X = a:b$. Folglich etc.
und in dem zweyten:
Wenn $L:l < a:b$:
so ist $L + X:l = a:b$. Folglich etc.

Beyde Fälle enthalten ebenfalls die nehmliche Ungereimtheit.

Beyspiele.

1stes Beyspiel. 58ste Fig. In allen Dreyecken (ACB), worin die Linie CF die gegenüberliegende Seite in zween gleiche Theile theilt, ist, das Dreyeck mag beschaffen seyn wie es wolle, jedesmahlen (2, 9. 2.) $\frac{\square \text{ auf } AC + \square \text{ auf } CB}{2} - \square$ auf CF $= \frac{1}{4}\square$ auf $AB = \square$ auf AF
$= \square$ auf FB.

Nun

Nun iſt aber die Linie AB die Gränze der Kleinheit nach von der Summe der Seiten AC und CB (1, 15); denn je näher C gegen die Linie AB gebracht wird, deſto mehr nähern ſich AC + CB der Grundlinie AB, ohne daſs ſie AB jemals gleich kommen, und daher gilt auch eben dasjenige, was in Rückſicht auf die Seiten AC und CB geſagt wird, von ihrer Gränze, das heiſst, von der Linie AB. Nimmt man nun an, C treffe irgendwo in D, und F in F zuſammen; ſo muſs vermöge dieſes Lehrſatzes auch das Nehmliche in Rückſicht auf die Linie AB Statt finden, namentlich

$$\frac{\square \text{ auf } AD + \square \text{ auf } DB}{2} - \square \text{ auf } DF = \square \text{ auf } AF.$$

Nun kann man gerade zu (directe) beweiſsen, daſs dies wahr ſey; denn nach 2, 2. 2., und 2, 2. iſt

$$\square \text{ auf } AD = \square \text{ auf } AF - \square \text{ auf } DF - 2 \text{ Recht. aus } AD, DF:$$

$$\text{und } \square \text{ auf } DB = \square \text{ auf } AF + \square \text{ auf } DF + 2 \text{ Recht. aus } AF, DF;$$

$$\text{und folglich } \square \text{ auf } AD + \square \text{ auf } DB = 2 \square \text{ auf } AF + 2 \text{ Recht. } DF, DF \text{ *)}$$

das heiſst

$$\square \text{ auf } AF = \frac{\square \text{ auf } AD + \square \text{ auf } DB}{2} - \square \text{ auf } DF.$$

Man kann den Lehrſatz auf die nehmliche Art beweiſsen, wenn das △ ACB ein ſtumpfes Dreyeck iſt

*) Vergl. 2, 1. 3.

ist (168ste Fig. *) und folglich der Punkt D ausserhalb AB fällt.

2tes Beyspiel. 40ste Fig. Was den Kreis betrift, so findet folgende Verhältniss in Rücksicht auf die Secanten oder Schnittlinien Statt (5, 13.): Recht. aus AD, KA = Recht. aus AH, PA; und folglich findet dies auch in Rücksicht auf die Gränzen der Schnittlinien, das heisst (1ster Erkl. 1stes Beyspiel) in Rücksicht auf die Berührungslinien Statt; und folglich □ auf AB = □ auf AI, oder AB = AI, ein Satz, welchen man bereits aus andern Elementen wissen kann (aus 5, 11. 4., und 5, 13. 4.)

3tes Beyspiel. 169ste Fig. Die Berührungslinie in irgend einem beständigen Punkte B ist die Gränze aller durch diesen Punkt gehenden Schnittlinien. Man ziehe durch den Mittelpunkt C die Mittellinie FCEA, welche der Schnittlinie DBA in A begegne. BRM, DNI und KCG sollen senkrecht auf der Mittellinie stehen, und BQ mit EF parallel seyn. In diesem Falle ist vermöge der Aehnlichkeit der Dreyecke BOD und ARB, in Rücksicht auf alle durch B gezogene Schnittlinien; DO : OB = RB : RA; und folglich ist die Gränze der Kleinheit nach von DO zu der Gränze der Kleinheit nach von OB = RB : RA. Diese Verhältniss wird uns zu erkennen geben, wohin A fallen müsse, damit ABD in B eine Berührungslinie seyn könne.

Es

*) Man könnte sich hier auch der 57sten Fig. bedienen; wenn man AB in F in zween gleiche Theile theilte, und von C eine gerade Linie nach F zöge.

Es ist nehmlich DO : OB = OQ : IO (5, 12. 1.); und folglich ist die Verhältniss der Gränzen von OQ und IO die der Gränzen von DO und OB. Nun ist die Gränze von OQ, die Sehne BQ = 2BP = 2RC (5, 5. *), die Gränze von IO ist MB = 2RB; folglich ist die Verhältniss von RC : RB die der Gränzen von DO und OB, folglich die von RB und RA. Folglich wird ABD Berührungslinie seyn, wenn RC : RB = RB : RA, das heisst, wenn RB zwischen RC und RA mittlere Proportional-Linie ist. Dies erhellet auch ausser aller Kenntniss von Gränzen unmittelbar aus dem 7ten Lehrsatze des 5ten Buches, dass, wenn ABD Berührungslinie, der < ABC = <; und folglich (4, 12. 1.) RC : RB = RB : RA ist.

Anmerkung. Ich werde in dem 8ten, 11ten, und 12ten Lehrsatze noch viele Beyspiele anführen. Die zuvor angegebene werden hinlänglich seyn, um den richtigen Begriff von Gränze zu erhärten.

6ter Lehrsatz.

Behalten zwo Größen A *und* B, *welche beyde veränderlich sind, zu zwoen beständigen Größen immer die nehmliche Verhältniß* (A : B = a : b), *sie mögen eine Vermehrung oder Verminderung leiden, welche sie wollen; so werden ihre Gränzen* (L *und* l) *sich ebenfalls in der nehmlichen Verhältniß* (a : b) *befinden.*

L'Hui-

*) Sollte heissen 5, 6, ich würde hierbey noch 1, 19. fügen.

L'Huilier. §. 4. — *Maclaurin* p. 11. *Tacquet Theor. selecta* ex *Archimede* pr. 1. und 2.

Beweis. Wenn nicht; so sey $L:l > a:b$, und folglich $L - X:l = a:b = A:B$.

Nun ist B, wenn l die Gränze der Grösse nach ist, kleiner als l; folglich muss auch immer (3, 9.) A kleiner als $L - x$ seyn, welches unrichtig ist; denn da L die Gränze von A ist; so kann A sich der L um mehr, als eine bestimmte Grösse X nähern.

Wenn $L:l < a:b$;

so ist $L:l - x = a:b = A:B$.

Nun ist $A < L$. Folglich muss $B < l - x$ seyn. Dies ist dem Begriffe von Gränze entgegen. Folglich ist $L:l = a:b$. Man führt den Beweis auf die nehmliche Art, wenn L und l die Gränzen der Kleinheit nach sind.

7ter Lehrsatz.

Bleiben zwo Verhältnisse veränderlicher Grössen (A *und* B, L *und* M) *einander immer gleich, die Grössen selbst mögen bey ihrer Vermehrung oder Verminderung eine Veränderung leiden, welche sie wollen* (*das heißt, ist immer* $A:B = L:M$); *so sind die Verhältnisse ihrer Gränzen* (a *und* b, l *und* m) *einander ebenfalls gleich* (*das heißt, so ist* $a:b = l:m$)

L'Huilier. §. 5.

Beweis. Da die Verhältniss a:b die Gränze von der Verhältniss A: B ist; so ist sie auch die Grän-

Gränze von L : M. Nun ist aber die Verhältniss l : m die Gränze der Verhältniss L : M. Folglich sind a : b und l : m die Gränzen von einer und derselben Verhältniss L : M. Folglich sind die Verhältnisse a : b und l : m einander (4ter Lehrs.) gleich.

8ter Lehrsatz.

Die Gränze einer aus zwoen oder mehreren Größen (A : B *und* G : D) *Größen zusammengesetzten Verhältniß ist die zusammengesetzte Verhältniß der Gränzen* (a : b *und* g : d) *dieser Größen* (A, B, G, D).

La Chapelle §. 434. — *L'Huilier.* §. 6.

Beweis. Ist A : B die Gränze von a : b, und g : d die von G : D; so nähert sich a : b der Verhältniss A : B um mehr, als um irgend eine gegebene Grösse. Eben dies gilt auch von g : d in Rücksicht auf die Verhältniss G : D. Folglich wird sich auch $\frac{a}{b} \times \frac{g}{d}$ dem Produkte $\frac{A}{B} \times \frac{G}{D}$ um irgend eine gegebene Grösse mehr nähern, das heisst, seine Gränze seyn.

9ter Lehrsatz. 82ste Fig.

Wenn die Linien AB, BC *auf einander rechtwinklicht stehen, mit der krummen Linie* AC *eine Figur bilden, und man die Grundlinie* BC *in so viele gleiche Theile* BD, DE, EF, *u. s. w., als man will, theilet, um mit den Linien* MD, NE, *u. s. w.* AM, SLN, *u. s. w. die Rechtecke* AMDB, SLDB, DLNE, RKED *u. s. w. zu machen; so wird man, indem man die Anzahl der Theile* BD, DE,

u. s. w. vermehrt, und folglich ihre Größe vermindert. die krummlinichte Figur ABCA *als Gränze der äußern Figur* (AMLNK *u. s. w.*) *und der innern Figur* (SLRKQ *u. s. w.*) *bekommen, und die Gränze der Verhältniß dieser Figuren wird folglich eine Gleichheits-Verhältniß seyn.*

Newton. Lemm. 2. 3.

Beweis. Der Ueberschuss der äussern Figur über die innere ist die Summe aller Parallelogramme AL, LK, KI, u. s. w. Die Summe dieser Parallelogramme ist das Rechteck AMBD, welches durch beständige Verminderung von BD um irgend eine gegebene Grösse kleiner wird. Hieraus erhellet der Lehrsatz.

Anmerkung. Eben dies findet auch Statt, wenn man die krumme Linie AC in eine gerade Linie AC verändert, und man folglich ein geradelinichtes Dreyeck ACB hat. Dieser Lehrsatz ist von grossem Nutzen in der Naturlehre. Es gründet sich auf denselben der Beweis von den vorzüglichsten Eigenschaften der eilenden Bewegung, und folglich der Beweis von den Eigenschaften fallender Körper. Siehe *S'Gravesande Physica* §. 373. — *Musschenbruck* §. 187. — *Keill Inleiding tot de waare Wis- en Sternekunde.* XI. Les. Theor. XVII. (*Keill Einleitung in die wahre Mathematik und Astronomie. 11te Lektion, 17ter Lehrsatz.*)

2te Abtheilung.

Ueber den Umkreis und Inhalt des Kreises. *)

10ter Lehrsatz.

Der Umkreis ist größer, als der Umfang irgend eines Vielecks in dem Kreise, und kleiner, als der Umfang irgend eines Vielecks um den Kreis. Eben so ist es mit dem Inhalt beschaffen.

Beweis. Der 1ste Satz (s. die 79ste Fig.) erhellet aus dem 1sten und 2ten Corollarium des 17ten Lehrsatzes im 6ten Buche, und der 2te Satz (s. die 81ste Fig.) folgt aus dem 1sten und 2ten Corollarium des 22sten Lehrsatzes eben dieses 6ten Buchs.

Anmerkung. *Archimedes* hat den zweyten Satz aus dem *Grundsatze*, daſs eine Flächen-Figur, welche eine andere enthalte, gröſser als diese zwote sey, gefolgert (*de Sphaera et Cylindro* I. pr. 1.)

11ter Lehrsatz.

Der Umkreis ist die Gränze aller Vielecke, welche man in und um den Kreis beschreibt. Eben so verhält es sich mit dem Inhalte.

*) Lesenswürdig über diese Materie sind die zwo Dissertationen meines verehrungswürdigen Lehrers, des Herrn Prof. Pfleiderers in Tübingen: de dimensione circuli. Tubingae, Annis 1787, 1790.

Tacquet Selecta ex Archimede.

Beweis. 17ter und 22ster Lehrsatz des 6ten Buchs, und 1ste Erklärung dieses Buchs. *)

1stes Corollarium.

Hieraus ergiebt sich, wie man den Ausdruck: ein Kreis sey ein Vieleck von einer unendlichen Anzahl Seiten zu verstehen habe. Allein dieser Ausdruck ist nicht bestimmt.

2tes Corollarium.

Die in und um den Kreis beschriebenen Vielecke nähern sich einander je länger je mehr, und ihre letzte Verhältniß ist die Gleichheits-Verhältniß.

Siehe auch den 9ten Lehrsatz in diesem Buche.

3tes Corollarium.

Der Halbmesser des Kreises ist die Gränze der Lothlinien der in den Kreis beschriebenen regelmäßigen Vielecke.

12*ter*

*) Meines Erachtens sagt dieser Lehrsatz, nur mit andern Worten, was der vorhergehende 10te ausdrückt; ich möchte ihn also lieber als Corollarium dieses 10ten Lehrsatzes betrachtet wissen.

12ter *Lehrsatz.*

Die Umkreise zweener ungleicher Kreise verhalten sich immer wie ihre Durchmesser, und daher wie ihre Halbmesser zusammen.

Tacquet Selecta ex *Archimede* pr. 2 *) — St, 268 und 269ste SS. 22ster S.

Beweis. 9ter Lehrsatz des 6ten, und 6ter und 10ter Lehrsatz dieses Buchs.

1stes *Corollarium.*

Alle Kreise sind ähnliche Figuren.

1ste Anmerkung. Ich habe in der 1sten Erklärung des 4ten Buchs angezeigt, was ich unter ähnlichen Figuren verstehe. Allein jene Erklärung ist nicht, wenigstens nicht gerade zu, auf den Kreis anwendbar. Ich halte dafür, man könne die beständige Verhältniss des Halbmessers zu dem Umkreise als Unterscheidungszeichen dieser Verhältniss annehmen, da jene beständige Verhältniss ein Corollarium aus der Aehnlichkeit der Vielecke ist.

2te Anmerkung. *Euklid* hat die Aehnlichkeit der Kreise stillschweigend angenommen.

*) In der Ausgabe, die im Jahr nach Chr. G. 1665, zu Antwerpen erschien, ist sie der 7te Satz in den *selectis ex Archimede.*

2tes Corollarium.

Aehnliche Bogen zweener ungleicher Kreiſe müſſen diejenige Bogen ſeyn, welche zu ihren Umkreiſen, und folglich zu ihren Halbmeſſern eine und dieſelbe Verhältniß haben.

3tes Corollarium.

Eben ſo werden ähnliche Abſchnitte ſolche Abſchnitte ſeyn, deren Bogen ſich wie die Umkreiſe, oder Durchmeſſer der ganzen Kreiſe gegen einander verhalten, und deren Sehnen folglich auch die nehmliche Verhältniß haben.

13ter Lehrſatz.

Der Inhalt des Kreiſes iſt dem Inhalte eines Dreyecks gleich, deſſen Grundlinie dem Umkreiſe, und deſſen Lothlinie ſeinem Halbmeſſer gleich iſt.

Tacquet Selecta ex Archimede prr. 4. 5. *)

Beweis. Man nehme ein ſolches Dreyeck an. Nun iſt dieſes Dreyeck die Gränze der ſo wohl in als um den Kreis beſchriebenen Vielecke (2, 17, und 11ter Lehrſatz, 11ten Lehrſatzes 3tes Corollarium, und 8ter Lehrſatz in dieſem Buche.) Allein der Kreis iſt ebenfalls die Gränze dieſer Vielecke (vermöge des 10ten Lehrſatzes). Hieraus ergiebt ſich unſer Lehrſatz (nach dem 4ten Lehrſatze.)

*) in der ang. Ausg. iſt er allein der 5te Lehrſatz.

1ste Anmerkung. Archimed hat diesen Lehrsatz fürtrefflich schon bewiesen (de circuli dimensione), und Maclaurin hat eben diesen Satz sehr gut erklärt (Traité des Fluxions p. IX.)

1stes Corollarium.

Will man den Inhalt des Kreises vermitteist Zahlen ausdrücken, und wendet die Aufmerksamkeit auf das, was ich No. 5. des 8ten Corollariums vom 7ten Lehrsatze des 4ten Buchs gelehrt habe; so ergiebt sich, wenn man überhaupt annimmt, O drücke den Umkreis aus, wenn der Durchmesser 1 sey, und wenn man weiter R als den Halbmesser eines besondern Kreises, und D als dessen Durchmesser voraussetzt, daß der Inhalt dieses Kreises $= O.R^2 = \frac{O.D^2}{2}$ *sey.*

2tes Corollarium.

*Der Inhalt des Kreises verhält sich zu dem Inhalt des in den Kreis beschriebenen Quadrats, wie der halbe Umkreis zu dem Durchmesser (6, 4tes Corollarium *).) Auch verhält sich der Inhalt des Kreises zu dem Inhalte des um den Kreis beschriebenen Quadrats oder zu dem Quadrate auf dem Durchmesser, wie der vierte Theil des Umkreises zu dem Durchmesser* (6, 21. 3.)

Tacquet Selecta ex Archimede pr. 5. Cor. 2.

*) Wahrscheinlich 6, 8. 4.

3tes Corollarium.

Der Inhalt eines Ausſchnittes iſt einem Dreyecke gleich, deſſen Grundlinie dem Bogen des Ausſchnittes, und die Höhe dem Halbmeſſer gleich iſt.

St. 273ſte S. Corollarium.

In Rückſicht der Erwägung, daſs der Umkreis des Bogens die Gränze der Summe von den Grundlinien der in den Ausſchnitt beſchriebenen gleichſchenklichten Dreyecke, und der Halbmeſſer die Gränze der Lothlinien von allen dieſen Dreyecken iſt.

2te Anmerkung. Folglich iſt, wenn B den Bogen des *Ausſchnitts* bezeichnet, der Inhalt dieſes *Ausſchnitts* $= \frac{B \times R}{2}$.

3te Anmerkung. Man kann immer ein Quadrat beſchreiben, deſſen Inhalt dem Inhalt eines gegebenen Dreyecks gleich iſt. Siehe die 18te Aufgabe im 3ten Buche der AA. Man ſollte daher ein Quadrat, welches dem Inhalt eines Kreiſes gleich wäre, beſchreiben können, wenn man eine dem Umkreis gleiche gerade Linie ziehen könnte. Wäre dies ausführbar, ſo würde die wichtige Aufgabe von der *Quadratur*, oder Inhaltsbeſtimmung des Kreiſes, *geometriſch* aufgelöſst ſeyn. Allein man hat bis jetzt keine ſolche geometriſche Methode erfunden. Indeſſen halte ich es nicht für unmöglich, daſs man der Frage mit der Zeit Genüge thun könnte, und ich bin davon um ſo mehr

mehr überzeugt, als man (wie ich in dem 3ten Corollarium und der 1sten und 2ten Anmerkung zu dem folgenden 14ten Lehrsatze zeigen werde), den Inhalt verschiedener aus Kreisbogen bestehender Figuren bereits gefunden hat. Ich bin daher der Meinung *Hennert's* und anderer Mathematiker, dass die *Quadratur* des Kreises dennoch im geometrischen Sinne nicht unmöglich sey, wenn man sie schon noch nicht erfunden hat. Ich meyne im *geometrischen* Sinne. Ganz anders verhält es sich, wenn man die Aufgabe in *arithmetischer* Bedeutung nimmt, das heisst, wenn von Zahlen, welche den Inhalt oder Umkreis in Beziehung auf das Quadrat des Durchmessers, oder den Durchmesser ausdrücken sollen, die Rede ist. Ich zweifle, ob diese Zahlen wohl je *meßbar* seyn können. Siehe die Anmerkung zu dem folgenden 15ten Lehrsatze.

14*ter Lehrsatz.*

Ungleiche Kreise verhalten sich zu einander, wie die Quadrate ihrer Durchmesser.

Eukl. 12, 2. und *Tacquet* bey dieser Stelle, 2tes Cor. — *St.* 275ste S. 27ster S.

Beweis. 1stes Corollarium des 12ten Lehrsatzes in diesem, und 15ter Lehrsatz in dem 4ten Buche, oder 12ter und 13ter Lehrsatz dieses Buchs.

1stes Corollarium.

Man kennt also immer die wechselseitige Verhältniß zweener Kreise, deren Durchmesser bekannt sind, und man kann daher Kreise beschreiben, welche eine bestimmte Verhältniß zu einander haben. Siehe die 33ste und 34ste Aufgabe des 3ten Buchs.

Tacquet zu Euklid 12, 2. 3tes Cor.

2tes Corollarium.

Beschreibt man auf die Hypothenuse und beyde Seiten eines rechtwinklichten Dreyecks, welche den rechten Winkel bilden, Kreise; so ist die Summe der beyden Kreise, welche man auf den den rechten Winkel bildenden Seiten beschrieben hat, dem auf der Hypothenuse beschriebenen Kreise gleich (4, 20.) *und man kann daher (nach der 35sten Aufgabe des 3ten Buchs) einen Kreis beschreiben, welcher einer gegebenen Anzahl Kreise gleich seyn wird.*

St. 280ste S. 30ster Satz.

3tes Corollarium. 83ste Fig.

Beschreibt man auf den beyden Seiten eines rechtwinklichten Dreyecks, welche den rechten Winkel bilden, nach einer und derselben Seite hin, halbe Kreise, welche daher den auf der Hypothenuse beschriebenen halben Kreis schneiden; so werden die beeden kleinen Monde F *und* G *dem gegebenen Dreyecke gleich seyn.*

Vermöge des 2ten Corollariums.

1*ste Anmerkung*. Die beeden *kleinen Monde* sind gleich, wenn das Dreyeck ADB gleichschenklicht ist. Im entgegengesetzten Falle verhalten sie sich zu einander, wie die Dreyecke ADC und DCB.

2*te Anmerkung*. Hier ist also ein Beyspiel eines innerhalb Kreisbogen enthaltenen Raums, dessen Inhalt vollkommen bekannt ist. Man benennt diese *kleinen Monde* nach ihrem Erfinder *Hippocrates* von *Chios*. Allein es giebt eine Menge solcher *Monde*, deren Inhalt man genau finden kann. So wird zum Beyspiel (s. die 170ste Fig.) wenn man den Kreis in sechs Theile theilt, die Sehnen (oder Seiten des Sechsecks) AB und BD, und sodann aus F und E mit dem nehmlichen Halbmesser die Bogen AC und CD zieht, welche einander im Mittelpunkte begegnen, die krummlinichte Figur ABDCA, welche *Archimed* und *Proclus Arbelos* nennen, der Raute ABDC gleich seyn, wie dies von selbst erhellet. Siehe über diese *Monde* und *Figuren* der Art *Kraft geometria sublimior* §§. 161. und viele ff.

3te

3te Abtheilung.

Ueber die Verhältniſs des Umkreiſes zu ſeinem Durchmeſſer.

15ter Lehrſatz.

Man kann die Verhältniß des Umkreiſes zu ſeinem Durchmeſſer vermittelſt der Eigenſchaften der Vielecke nur durch möglichſte Annäherung *beſtimmen. Dieſe auf ſolche Art beſtimmte Verhältniß iſt unmeßbar. Eben ſo verhält es ſich mit der Verhältniß vom Inhalt des Kreiſes zu dem Quadrate des Durchmeſſers.*

Beweis. Der Umkreis iſt die Gränze des Umfangs der Vielecke; und daher iſt der Umkreis, man mag ſo viele Seiten in einem Vielecke annehmen, als man will, immer gröſser, als der Umfang jenes Vielecks, wenn es in den Kreis, und immer kleiner, als jenes Vieleck, wenn es um den Kreis beſchrieben worden iſt, dergeſtalt daſs, da der Umkreis zwiſchen beyde Vielecke fällt, man nicht wiſſen kann, um wie viel der Umkreis gröſser, als das erſtere Vieleck, und um wie viel er kleiner, als das letztere ſey?

Man kann daher ſtatt des Umkreiſes bloſs den Umfang eines Vielecks annehmen, welcher von dem Umkreiſe um ſo viel weniger abweichen wird, als das Vieleck mehr Seiten hat.

Weiter iſt die Verhältniſs vom Umfange des Vielecks zu ſeinem Durchmeſſer ſelbſt (ausgenommen

men die vom Sechsecke zu demselben) immer unmessbar. Man kennt die Gränzen, zwischen welche diese Verhältniss fällt, bloss vermittelst beliebiger Approximation. Man mag daher ein Vieleck, welches man wolle, annehmen, um sich seines Umfanges statt des Umkreises zu bedienen; so ist es immer in Beziehung auf den Durchmesser unmessbar.

Und da der Inhalt des Kreises einem Dreyecke, dessen Höhe der *Halbmesser* und folglich messbar, und die Grundlinie der Umkreis, und daher auf die besagte Art unmessbar, gleich ist; so wird auch der Inhalt dieses Dreyecks, und folglich der des Kreises in Beziehung auf das Quadrat des Durchmessers unmessbar seyn.

Anmerkung. Es fragt sich, ob man für den Umkreis keine mit dem Durchmesser messbare Zahl finden könne? ich kann nicht bergen, dass ich sehr geneigt bin, mir die Sache als unmöglich zu denken, obschon diese Entscheidung mit Schwierigkeiten verbunden ist. Ich halte es deswegen für sehr wahrscheinlich, dass die Auflösung der Quadratur des Kreises, im arithmetischen Sinne genommen, unmöglich sey.

16ter Lehrsatz.

Die Verhältniß des Umkreises zu seinem Durchmesser ist kleiner, als die Verhältniß von $3\frac{10}{70}$: 1, *und größer als die Verhältniß von* $3\frac{10}{71}$: 1, *oder, welches eben dasselbe ist, sie ist kleiner als* 22: 7 *und größer als* 223:71. *Nach Archimed.*

Die

Die Verhältniß 3,1415926535 : 1, welche Ludolf van Ceulen angegeben hat, ist genauer. Die von Metius mitgetheilte Verhältniß von 355 : 113 ist beynahe eben so genau.

1ste Anmerkung.

Verfahrungsart des Archimedes.

Dieser Mathematiker berechnete den Umfang eines um den Kreis beschriebenen, und den Umfang eines in den Kreis beschriebenen Sechsundneunzigecks, der Umkreis ist kleiner als jener, und größer als dieser.

Construktion. In Rücksicht auf das um den Kreis beschriebene Sechsundneunzigeck. 171ste Fig.

BI sey die Seite eines in den Kreis beschriebenen Zwölfecks. LBD stehe auf dem Durchmesser in B senkrecht, und sey daher eine Berührungslinie. Man ziehe CIL. Den < ICB theile HC in zween gleiche Theile. Dies thue GC in Rücksicht auf den < HCB, FC in Rücksicht auf den < GCB, EC in Rücksicht auf den < FCB. In diesem Falle ist < ECB der Mittelpunktswinkel eines Hundertundzweyundneunzigecks, und folglich ist, wenn < BGD = < ECB, der < ECD der Mittelpunktswinkel eines Sechsundneunzigecks, und daher ist ED die Seite eines um den Kreis beschriebenen Sechsundneunzigecks. Da ich nun die Grösse von den Seiten dieser Vielecke zu bestimmen, und sie daher durch Zahlen auszudrücken habe; so muss ich auf das 8te Corollarium des 7ten Lehrsatzes, und das 1ste Corollarium des 15ten Lehrsatzes im 4ten Buche Rücksicht nehmen, und anstatt der Quadrate auf Linien, mich der zwoten

Mach-

Machten von den Zahlen, wodurch die Seiten ausgedruckt werden, und anstatt der Seiten, auf welchen man ein gegebenes Quadrat beschreiben könnte, der Quadratwurzeln aus der Zahl, welche den Inhalt dieses Quadrats ausdrückt, bedienen. *Archimed* verfuhr auch auf diese Art.

Beweis. Nach 6, 22. No. 2 ist

1stens. BL : BH = CL + CB : CB;
2tens. BH : BG = CH + CB : CB;
3tens. BG : BF = CG + CB : CB;
4tens. BF : BE = CF + CB : CB;

oder vermittelst der Versetzung:

1stens. CL + CB : BL = CB : BH;
2tens. CH + CB : BH = CB : BG;
3tens. CG + CB : BG = CB : BF;
4tens. CF + CB : BF = CB : BE.

Nun ist IM = $\frac{1}{2}$ IK (5, 6.),
und IK = CI (6, 8. 2.);
folglich IM = $\frac{1}{2}$ CI;
und da BL : CL = IM : CI (4, 2.);
so ist BL = $\frac{1}{2}$ CL (3, 9.).

Hieraus ergiebt sich, dass, wenn BL bekannt ist, CL es ebenfalls, und nach 2, 7. auch CB es sey, und umgekehrt. Man kann daher in No. 1. BH; folglich auch CH (2, 7.), und sodann in No. 2. BG, in No. 3. BF, in No. 4. BE finden.

1stens nahm *Archimed* BL = 153; folglich CL = 306; folglich $\overline{CB}^2 = \overline{306}^2 - \overline{153}^2 =$ 70227;

70227; folglich $\overline{CB}^2 > 70225$, und $CB > \sqrt{70225}$ oder > 265.

Hieraus ergiebt sich nach No. 1.

$CL + CB : BL > 571 : 153$, und folglich auch $CB : HB > 571 : 153$, oder $> 8 \times 571 : 8 \times 153$, oder $> 4568 : 1224$.

Wenn daher $HB = 1224$; so ist $CB > 4568$.

2*tens*. Folglich $\overline{CH}^2 > \overline{1224}^2 + \overline{4568}^2$ oder 22364800
folglich > 22363441, oder $> \overline{4729}^2$;
folglich $CH > 4729$; und folglich, nach No. 2.
$CB : BG > 9297 : 1224$; und folglich, wenn $BG = 1224$; so ist $CB > 9297$.

3*tens*. Folglich ist $\overline{GC}^2 > \overline{9297}^2 + \overline{1224}^2$, oder > 87932385; folglich > 87928129, oder $> \overline{9377}^2$.
Folglich ist nach No. 3. $GC > 9377$, und $CB : BF > 18674 : 1224$, oder
$> \frac{18674}{2} : \frac{1224}{2}$, oder $> 9337 : 612$, und folglich, wenn $BF = 612$; so ist $CB > 9337$.

4*tens*. Folglich ist $\overline{CF}^2 > \overline{612}^2 + \overline{9337}^2$, oder > 87554113; folglich > 87553449, $> \overline{9357}^2$
folglich $CF > 9357$, und folglich nach No. 4.
$CB : BE > 9347 : 306$;
folglich $2CB : 2EB$ oder $ED > 9347 : 306$; und folglich, wenn $ED = 306$; so ist $2CB$, oder der Durchmesser > 9347.

Nun

Nun ist $96 \times ED = 29376 =$ Umfang des Vielecks.

Folglich ist der Umfang des Vielecks : Durchmesser $< 29376 : 9347$ oder $< \frac{29376}{9347} : 1$, oder $< 3\frac{1335}{9347} : 1$.

Nun ist $\frac{1335}{9347} < \frac{1}{7}$, und der Umkreis kleiner als der Umfang des Vielecks; folglich ist

der Umkreis zu dem Durchmesser $< 3\frac{1}{7} : 1$; oder $< 22 : 7$.

Construktion. In Rücksicht auf das in den Kreis beschriebene Sechsundneunzigeck. 172ste Fig.

BL sey die Seite eines in den Kreis beschriebenen Sechsecks. AH theile den Bogen BL, AG den Bogen BH, AF den Bogen BG, AE den Bogen BF in zween gleiche Theile. Folg: ist BE die Sehne eines Sechsundneunzigecks.

Beweis. Vermöge 4, 9. ist

$AL : AB = KL : BK$; folglich (3, 8. No. 1.)
$AL + AB : AB = KL + BK$ oder $BL : BK$;

oder

$AL + AB : BL = AB : BK.$

Nun ist $\triangle BHK \backsim \triangle AHB$; folglich
$AB : BK = AH : BH$; und

1stens. $AL = AB : BL = AH : BH$.

Auf die nehmliche Art ist

2tens. $AH + AB : BH = AG : BG$.
3tens. $AG + AB : GB = AF : FB$.
4tens. $AF + AB : FB = AE : EB$.

Sobald nun LB gegeben ist, so ist $AB = 2 LB$ bekannt, und umgekehrt. Hierdurch wird AL (nach 2, 7. 1.) gefunden, und daher erhält man endlich den Werth von EB.

Nimm nun $LB = 780$; folglich $AB = 1560$; $\overline{LA}^2 = \overline{1560}^2 - \overline{780}^2 = 1825200 < 1825201$, oder $< \overline{1351}^2$; folglich $LA < 1351$. folglich 1stens nach No. 1. $AH : BH < 2911 : 780$ oder < 291190:

Wenn daher $BH = 78000$; so ist $AH < 291100$; folglich $\overline{AB}^2 < \overline{291100}^2 + \overline{78000}^2$, oder < 90823210000, oder < 90826890625, oder $< \overline{301375}^2$; folglich $AB < 301375$.

2tens. Folglich ist nach No. 2. $AG : BG < 592475 : 78000$, oder wenn man beyde Zahlen mit 11 vervielfacht, und zuvor oder hernach mit 325 theilt; so ist $AG : BG = 20053 : 2640$.

Wenn daher $BG = 2640$; so ist $AG < 20053$; folglich $\overline{AB}^2 < \overline{2640}^2 + \overline{20053}^2 < 409'092309 < 409'131529$, oder $< \overline{20227}^2$; folglich $AB < 20227$.

3tens. Folglich ist nach No. 3. $AF : BF < 40280 : 2640$, oder wenn man mit 3 vervielfacht, und mit 20 theilt, $AB : BF < 6042 : 396$.

Wenn

Wenn daher $BF = 396$; so ist $AF < 6042$; folglich $\overline{AB}^2 < \overline{396}^2 < \overline{6042}^2 < 36'662580 < 36'663025$, oder $< \overline{6055}^2$; folglich ist $AB < 6055$.

4tens. Folglich ist nach No. 4. $AE : BE < 12097 : 396$, oder $< 24194 : 792$.

Wenn daher $BE = 792$; so ist $AE < 24194$; folglich $\overline{AB}^2 < \overline{792} < \overline{24194}^2$, oder $585'976900$, oder $585'978849$, oder $< \overline{24207}^2$;
folglich $AB < 24207$.

Man hat daher

$BE : AB > 792 : 24207$, oder, wenn man mit 3 theilt,

$$BE : AB > 264 : 8069,$$

und $96 \times BE$, oder der Umfang des Vielecks : $AB > 96 \times 264$, oder $25344 : 8069$, oder $> \frac{25344}{8069} : 1$, oder $> 3\frac{1137}{8069} : 1$. Allein $\frac{1137}{8069}$ ist $< \frac{10}{71}$. und der Umkreis ist noch grösser als der Umfang des Vielecks; folglich ist der Umkreis zu dem Durchmesser $> 3\frac{10}{71} : 1$, oder $> 223 : 71$.

2te *Anmerkung.*

Die, obgleich etwas zu grosse Verhältniss von $22 : 7$. thut dennoch in der Praxis den meisten Fällen Genüge.

3te *Anmerkung.*

Archimed verfuhr einigermaassen anders, als die neuern Mathematiker, welche auf ihn folgten;

ten. Er berechnete in Rücksicht auf einen gegebenen Durchmesser nicht die Seiten des Zwölf —, Vierundzwanzig —, Achtundvierzig —, Sechsundneunzig — Ecks; sondern Er suchte die Verhältniss, welche die Seite eines jeden von diesen Vielecken zu dem Durchmesser haben muss, zu erhalten; und da diese Verhältniss unmessbar ist; so nahm Er in Hinsicht auf das um den Kreis beschriebene Vieleck, welches grösser als der Kreis ist, immer eine etwas grössere Verhältniss, und in Rücksicht des in den Kreis beschriebenen Vielecks, welches kleiner als der Kreis ist, eine etwas kleinere Verhältniss zum Durchmesser an, als die wahre Verhältniss der Seite des um —, oder in den Kreis beschriebenen Vielecks zum Durchmesser beträgt. Seine Berechnung hat es daher nicht bloss mit Zahlen, welche durch möglichste Annäherung richtig wären, sondern mit wahren Zahlen zu thun. Siehe hierüber *Montucla Histoire de la Quadrature du cercle*, PP. 31—36.

4te Anmerkung.

Ludolf van Ceulen schlug einen andern Weg ein. Er berechnete vermittelst des 5ten Corollariums meines 17ten Lehrsatzes, und des 21sten Lehrsatzes meines 6ten Buchs die Seiten vieler in —, und um den Kreis beschriebener Vielecke. Deswegen zog Er mit vieler Genauigkeit und auf eine grosse Anzahl dezimalen die Wurzeln aus unmessbaren Zahlen. Er fand daher in seinem Buche: *over den Cirkel*, worin man den ganzen Gang seiner Berechnungsart finden kann, dass, wenn man den Durchmesser = 1 annimmt, und sich eines Vielecks von

32212

32212'254720 Seiten bedient, der Umkreis grösser, als

3,14'''159265''358979'323845

und kleiner, als

3,14'''159265''358979'323847 ist.

Nachdem Er einige Zeit nachher in seinen *Fundamenta Arithmetices et Geometriae* eine noch genauere Berechnung anstellte; so fand Er, dass, wenn man den Durchmesser des Kreises = 1 annehme, der Umkreis grösser, als

3,14'''''159265''''358979'''323846''264338'327950

und kleiner, als

3,14'''''159265''''358979'''323846''264338'327951 *) seye.

Die von *Archimed* gefundene und mit einem Decimal-Bruche ausgedruckte Verhältniss 22 : 7 giebt 3,14285 **). Sie ist folglich, und zwar beynahe um $\frac{126}{100000}$, oder beynahe um $\frac{1}{800}$ Theilchen zu gross.

5te Anmerkung.

Jacob Metius fand die Verhältniss 355 : 113, *welche, da sie in ganzen Zahlen ausgedrückt ist, schon*

*) Da ich das im Texte angeführte Werk von *L. v. Ceulen* nicht besitze; so bemerke ich hier bloss, dass Wolf in seiner oft genannten Geometrie die leztere 5 Ziffern mit folgendem Unterschied aus *L. v. Ceulens* Schrift angiebt: „87950" oder 87951." Indessen giebt Tacquet diese Ziffern wieder Hr. V. an.

**) Giebt richtiger: 3, 142857.

ſchon ſehr genau iſt; denn wenn man ſie auf einen Decimalen-Bruch bringt; ſo giebt ſie 3,1415929, *welches nicht einmahl um* $\frac{3}{10000000}$ *Theile zu groß iſt.*

Siehe hierüber Montucla in der angeführten Stelle, und Tacquet Thh. ſelecta ex *Archimede Schol.* 4. pr. 6. p. 275. *).

6te Anmerkung.

Ich werde im 5ten Corollarium des 19ten Lehrſatzes vom 8ten Buche zeigen, wie ſehr man dieſes Geſchäfte vermittelſt der *Sinus-Tafeln* abkürze. Inzwiſchen bemerke man, daſs, da die mühſame Arbeit bey dieſem Geſchäfte darin beſteht, daſs man die Seiten verſchiedener, ſo wohl in —, als um den Kreis beſchriebener Vielecke berechnen muſs, und die *Sinus* und *Tangenten* die halben Seiten dieſer Vielecke ſind, man bereits bey der Berechnung mit den *Sinus-Tafeln* das Mühſame jener Arbeit verrichtet hat, und daher die Abkürzung mehr ſcheinbar ſey, als in der That geſchehe.

7te Anmerkung.

Snellius, vorzüglich aber *Huigens*, beede bedienten ſich vieler Abkürzungen. Sie fanden nehmlich neue Eigenſchaften der in — und um den Kreis beſchriebenen Vielecke, wodurch ſie ſich in Stand geſetzt ſahen, vermittelſt aus einer kleinen Anzahl Seiten beſtehender Vielecke dieſelbe Genauigkeit

*) In unſerer Ausg. pr. 6. P. 291.

keit, zu welcher es *Ludolf* vermittelst solcher Vielecke, die eine grosse Anzahl Seiten haben, gebracht hatte, zu erhalten. Ihr Verfahren beruhte auf folgenden Lehrsätzen.

17ter Lehrsatz. 173ste Fig.

Ein Kreis-Abschnitt, welcher kleiner, als der halbe Kreis ist, ist grösser, als die vier Drittheile eines gleichschenklichten Dreyecks, welches man auf seine Sehne in denselben beschrieben hat.

Huigens Pr. 3.

Construktion. Man beschreibe auf den Schenkeln FE und ED die gleichschenklichte Dreyecke FIE, ELD, die folglich einander gleich sind. Sodann beschreibe man abermals auf FI, IE, EL, LD die Dreyecke FmI, InE, EoL, LpD, welche alle einander gleich sind, und immer so fort in Rücksicht auf die Seiten dieser Dreyecke.

Beweis. Vermöge 6, 26. ist

$$\triangle FED < 4(\triangle FIE + \triangle ELD), \text{ oder}$$
$$\triangle FIE + \triangle ELD > \tfrac{1}{4} \triangle FED.$$

Eben so sind die auf FI und IE, EL und LD beschriebene $\triangle\triangle$ zusammen $> \frac{1}{4} (\triangle FIE + \triangle ELD,)$ und folglich $> \frac{1}{16} \triangle FED$.

Eben dies findet in Rücksicht auf alle Dreyecke Statt, welche man auf Fm, mI, In u. s. w. beschreiben kann.

Folglich ist die Summe aller dieser Dreyecke $> \Delta FED + \frac{1}{4}\Delta FED + \frac{1}{16}\Delta FED + \frac{1}{64}\Delta FED$ u. s. w., oder $> \Delta FED (1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} +$ u. s. w.)

Folglich ist die *Gränze* von der Summe aller jener Dreyecke grösser als die *Gränze* von $\Delta FED \times (1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} +$ u. s. w.) das heisst, als $\frac{4}{3}\Delta FED$ (2te Anm. zu der 1sten Erklärung in diesem Buche.)

Nun ist der Kreis-Abschnitt FIELD die *Gränze* von der Summe aller jener Dreyecke (16ter Lehrs.) *) Folglich ist der Kreis-Abschnitt $> \frac{4}{3}\Delta FED$.

18*ter Lehrsatz* 173ste Fig.

Ein Kreis-Abschnitt (IEL), *welcher kleiner als ein halber Kreis ist, ist kleiner, als zween Drittheile eines gleichschenklichten Dreyecks* (IGL), *welches man auf der Sehne dieses Kreis-Abschnitts vermittelst der Berührungs-Linien an den Endpunkten des Bogens beschrieben hat.*

Huigens. Pr. 4.

Construktion. Man ziehe die Berührungs-Linie XEY durch E. Man beschreibe auf IE, EL die gleichschenklichte Dreyecke InE, EoL und ziehe durch die Scheitel n und o die Berührungs-Linien qnr, sot. Man beschreibe auf In, nE, Eo, oL abermals solche Dreyecke, und immer so fort

Be-

*) Siehe den 10ten und 11ten Lehrs. dieses Buchs.

Beweis. $\triangle XGY + \triangle Xqr + \triangle SYt +$ u. s. w. $> \frac{1}{2}\triangle IEL + \frac{1}{2}\triangle InE + \frac{1}{2}\triangle EoL +$ u. s. w. (6, 27.);

folglich auch $> \frac{1}{2}(\triangle IEL + \triangle InE + \triangle EoL +$ u. s. w.)

Die Gränze der ersten Summe ist daher auch grösser, als die Gränze der Hälfte der zwoten Summe, das heisst: der Raum, welcher zwischen den Linien IG, GL und dem Kreis-Bogen InEoL enthalten ist, ist grösser, als der halbe Inhalt des Kreis-Abschnitts InEoLI, und daher ist der angezeigte Raum nebst dem benannten Kreis-Abschnitte, das heisst, das ganze $\triangle$ IGL $> 1\frac{1}{2}$ Kreis-Abschnitt InEoLI,

oder

Kreis-Abschnitt InEoLI $< \frac{2}{3}\triangle$ IGL.

Anmerkung. Der Grund, aus welchem man hier einen Kreis-Abschnitt nimmt, welcher kleiner als der halbe Kreis sey, springt in die Augen; denn wäre InEoLI ein halber Kreis; so würden die Linien IG, GL mit einander parallel seyn, und folglich kein Dreyeck bilden.

19*ter Lehrsatz.* 162ste Fig.

Der Inhalt eines Kreises ist immer größer, als der Inhalt eines in denselben Kreis beschriebenen regelmäßigen Vielecks, von einer geraden Anzahl Seiten nebst einem dritten Theile des Ueberschusses von dem Inhalte dieses Vielecks über den Inhalt eines in den nehmlichen Kreis beschriebenen Vielecks, welches je-

 doch

doch nur die halbe Anzahl Seiten von dem erſtern Vielecke hat.

Huigens. Pr. 5.

Conſtruktion. FIELDdBTAtF ſey das in den Kreis beſchriebene regelmäſsige Vieleck, welches 2g Seiten habe. Man nenne ſeinen Inhalt der Kürze halber *V*.

FEDBAF ſey das zweyte Vieleck, welches nur die halbe Anzahl Seiten des erſtern habe. Man nenne ſeinen Inhalt Kürze halber *v*.

Der Ueberſchuſs des erſtern Vielecks über das zweyte iſt daher der Anzahl g Dreyecke gleich, welche alle dem △ FIE gleich ſind; folglich iſt $V - v = g \times \triangle FIE$, und $V = v + g \times \triangle FIE$.

Beweis. Der Inhalt des Kreiſes iſt $= v +$ Kr. Abſchn. FIE + Kr. Abſchn. ELD + Kr. Abſchn. DdB + u. ſ. w. $= v + g \times$ Kr. Abſchn. FIE.

Nun iſt der Kreis-Abſchnitt FIE $> \frac{4}{3} \triangle FIE$ (17ter Lehrſatz); folglich iſt der Inhalt des Kreiſes $> v + \frac{4}{3} g \times \triangle FIE$, oder $> v + g \times \triangle FIE + \frac{1}{3} g \times \triangle FIE$, oder $> V + \frac{1}{3} (V - v.)$

Anmerk. Man ſieht hier zugleich die gröſsere Genauigkeit, mit welcher man die Zahlen, die den Inhalt des Kreiſes ausdrücken, vermittelſt dieſes Lehrſatzes beſtimmen kann. Vermöge der Methode *Archimed's* weiſs man bloſs, daſs der Inhalt des Kreiſes gröſser, als ein

in

in ihn beschriebenes Sechsundneunzigeck sey. Allein man lernt aus diesem Lehrsatze noch über dies, dass er grösser als ein Sechsundneunzigeck und ein $\frac{1}{3}$ des Unterschieds zwischen dem Sechsundneunzig- und Achtundvierzigeck sey.

20ster Lehrsatz. 173ste Fig.

Der Inhalt eines Kreises ist kleiner, als zween Drittheile eines um diesen Kreis beschriebenen Vielecks von einer geraden Zahl Seiten und ein Drittheil des in ihn beschriebenen ähnlichen Vielecks.

Huigens Pr. 6.

Beweis. Der Kreis-Abschnitt InEoLI < $\frac{2}{3}$ ΔIGL (18ter Lehrsatz); folglich der *Kreis-Abschnitt* InEoLI + ΔICL < $\frac{2}{3}$ Δ IGL + ΔICL, oder der *Kreis-Ausschnitt* ICLEI < $\frac{2}{3}$ Stück CIGL + $\frac{1}{3}$ ΔICL,

und folglich:

g x Kreis-Ausschnitt ICLEI < $\frac{2}{3}$ x g Stück CIGL + $\frac{1}{3}$ g x ΔICL, das heisst, der Inhalt des Kreises < $\frac{2}{3}$ des um den — + $\frac{1}{3}$ des in den Kreis beschriebenen Vielecks.

1ste Anmerk. Nach der Methode *Archimed's* weiss man bloss, dass der Kreis kleiner, als das um ihn beschriebene Sechsundneunzigeck sey. Nun wissen wir, dass er kleiner als zween Drittheile dieses Vielecks und *ein* Drittheil des in den Kreis beschriebenen Sechsundneunzigecks sey. Man bestimmt damit die Abweichung von der Richtigkeit viel genauer.

2te

2te Anmerk. Da man den Inhalt eines in den Kreis beschriebenen Vielecks vermittelst des 17ten Lehrsatzes, oder des 5ten und 6ten Corollariums eben dieses Lehrsatzes im 6ten Buche, wie auch den Inhalt des um den Kreis beschriebenen Vielecks vermittelst des 21sten Lehrsatzes vom nehmlichen Buch finden kann; so ergiebt sich hieraus die Leichtigkeit, mit welcher man vermittelst dieses unseres 22sten Lehrsatzes von diesem 7ten Buche den Inhalt des Kreises bestimmen könne. Man gelangt schon mit Hülfe des Zwölfecks zu einer sehr beträchtlichen Genauigkeit. *)

Corollarium.

Der Inhalt eines Kreis-Ausschnittes (CIELC) *ist ebenfalls kleiner, als zween Drittheile des durch die zween Halbmesser und die zwo an den Endpunkten des Bogen vom Kreis-Ausschnitte gezogene Berührungs-Linien gebildeten Trapeziums* (CIGLC), *und zugleich als ein Drittheil des Mittelpunkts-Dreyecks* (ICL).

Huigens. Pr. 6.

21ster Lehrsatz. 162ste oder 173ste und 174ste Figg.

Der Umkreis ist grösser, als der Umfang eines in ihn beschriebenen regelmässigen Vielecks von einer geraden Anzahl Seiten und der Drittheil des Unterschieds

*) Vergl. 6. 17. 6. 3.

schieds zwischen diesem Umfange und dem Umfange des Vielecks, welches nur die halbe Anzahl von Seiten hat.

Huigens. Pr. 7.

Construktion. Man setze voraus, FD sey die Seite eines Vielecks, FE, ED die Seiten eines Vielecks von einer doppelten Anzahl Seiten, und FI, IE, EL, LD die Seiten eines Vielecks, welches abermals eine doppelte Anzahl Seiten habe.

GH in der 174sten Fig. sey dem Umfange des Vielecks auf FD; GI dem Umfange des Vielecks auf FE gleich, und $IK = \frac{1}{3} HI = \frac{1}{3} (GI - GH.)$ Endlich sey die Lothlinie NZ dem Halbmesser des Kreises gleich. Man ziehe NG, NH, NI, NK, und nenne O den Umkreis.

Beweis. $\triangle GNI =$ Vieleck auf FI) 6, 17. 6.
$\triangle GNH =$ Vieleck auf FE)

und folglich $\triangle INK = \frac{1}{3} (\triangle GNI - \triangle GNH) = \frac{1}{3}$ (Vieleck auf FI — Vieleck auf FE).

Folglich ist der Inhalt des Kreises $> \triangle GNI + \triangle NIK$ (19ter Lehrsatz), oder (nach dem 13ten Lehrsatze dieses Buchs und 4, 17. 8. No. 6.) $O \cdot \frac{NZ}{2} > (GI + KI) \frac{NZ}{2}$, und folglich $O > GI + KI$, oder $> GI + \frac{1}{3} (GI - GH)$.

1stes Corollarium.

Wenn P *den Umfang eines Vielecks, und* p *den Umfang des vorhergehenden, das heißt, desjenigen Viel-*

Vielecks, welches nur die halbe Anzahl Seiten hat, bezeichnet; ſo iſt $O > P + \frac{P-p}{3}$, *oder* $> \frac{4}{3} P - \frac{p}{5}$; *folglich in Worten: ſo iſt der Umkreis immer größer, als vier Drittheile des Umfangs eines in ſeinen Kreis beſchriebenen Vielecks, welches eine gerade Anzahl Seiten hat, weniger der dritte Theil des Umfangs eines Vielecks, welches nur die halbe Anzahl Seiten hat.*

Huigens Pr. 7. Cor.

1ſte Anmerkung. Die Seite des Sechsecks iſt der Halbmeſſer. Folglich iſt der dritte Theil ſeines Umfangs dem Durchmeſſer gleich, und daher ſind die 16 Seiten des Zwölfecks weniger der Durchmeſſer kleiner als der Umkreis. Allein dieſer Unterſchied iſt ſehr unbedeutend. Nun kann man die Seite eines Zwölfecks vermittelſt 6, 17. 8. ſehr leicht berechnen. Man ſieht daher, daſs man auf dieſe Art genauer verfährt, als wenn man ſich nach der Methode *Archimed's* richtet, nach welcher man bloſs weiſs, daſs der Umkreis gröſser, als der Umfang des in den Kreis beſchriebenen Vielecks iſt.

2tes Corollarium.

Es erhellet aus dem Beweiſe und dem 19ten Lehrſatze, daß eben dieſelbe Wahrheit, welche in Rückſicht auf den ganzen Kreis Statt findet, auch in Hinſicht auf jeden Bogen gilt; folglich iſt ein Bogen jedesmahlen größer, als die vier Drittheile ſeiner Sehne

weni-

weniger der dritte Theil von der halben Sehne eines doppelten Bogens, oder grösser, als die Sehne und ein dritter Theil des Unterschiedes zwischen der Sehne und der halben Sehne eines doppelten Bogens.

2te *Anmerk.* *Huigens* bedient sich des Worts „*Sinus* eines Bogens" anstatt *der halben Sehne des doppelten* Bogens. Wir werden in dem 13ten Lehrsatze des 8ten Buchs sehen, dass es auf das Nehmliche hinausläuft.

3tes *Corollarium.* 174ste Fig.

Hieraus ergiebt sich eine sehr leichte Art, eine gerade Linie, welche einem gegebenen Kreis - Bogen so nahe als möglich gleich komme, geometrisch zu finden, wenn nur jener Bogen kleiner als der vierte Theil des Kreises ist.

ACB *sey der Bogen. Man theile ihn in* C *in zween gleiche Theile, ziehe* AC, CB; *ferner errichte man* CE *senkrecht. Es sey* $FG = AB$; $FI = AC + CB$; $IK = \frac{1}{3} GI$. FK *wird die verlangte Linie seyn, welche sich dem gegebenen Bogen* ACB *am meisten nähern wird; denn der Bogen* CB > *Sehne* $CB + \frac{1}{3}(CB - EB)$ (*nach dem vorherg. Cor.*); *folglich Bogen* $ACB > AC + CB + \frac{1}{3}(AC + CB - AB)$, *oder Bogen* $ACB > FI + \frac{1}{3}(FI - FG)$, *oder* $> FI + \frac{1}{3} GI$, *oder* $> FI + IK$, *oder* $> FK$.

Huigens. Pr. 12.

Anmerk. So wie der gegebene Bogen ACB kleiner ist, nähert sich ihm auch die Linie FK mehr. Deswegen verlangte ich einen Bogen,

wel-

welcher kleiner als der vierte Theil des Umkreises wäre. Allein würde der gegebene Bogen grösser seyn; so würde man ihn in 2, 4, 8, oder mehrere Theile theilen. Ein Verlangen, welchem man geometrisch Genüge thun kann. Man nehme alsdann an, FK sey einem der Theile gleich, und suche das Doppelte, Vier- oder Achtfache u. s. w. davon.

22ster Lehrsatz. 175ste Fig.

Wenn man aus dem Endpunkte (B) *des Durchmessers* (BG) *eine Schneidungs-Linie* (BK) *zieht, und bis an die auf dem andern Endpunkte* (G) *des Durchmessers gezogene Berührungs-Linie* (GKE) *gehen läßt; so ist der zwischen der zuerstgedachten Linie* (BC) *und dem Durchmesser* (BG) *enthaltene Bogen* (CG) *immer kleiner, als zween Drittheile des Stücks* (GK), *welches durch die genannte Schneidungs-Linie* (BK) *von der Berührungs-Linie* (GE) *abgeschnitten wird, und zugleich als der dritte Theil der vom Schneidungs-Punkte* (C) *) *des Bogens auf den Durchmesser* (BG) *niedergefällten Lothlinien* (CH.)

Huigens. Pr. 8.

Construktion. CZ sey eine Berührungs-Linie an C. Ziehe AZ.

Beweis. Das Stück ACZG = 2 △ ACZ = △, dessen Grundlinie AG und Höhe 2 CZ, oder dessen Grund-

*) Im Orig. stehen die Worte: „uit het einde des boogs.“

Grundlinie 2CZ, und Höhe AC oder AG ist (4, 7. 8. No. 5.).

Nun ist CZ = GZ (5, 15 Cor.) *);

Folglich würde, wenn man aus Z mit dem Halbmesser ZG einen Kreis beschriebe, eben dieser Kreis durch C und G, aber auch durch K gehen; denn der Winkel BCG = ein rechter Winkel (5, 5.); folglich auch < GCK; und daher muss der halbe Kreis durch K gehen; folglich ist auch KZ = ZG = CZ, und KG = 2KZ.

Folglich ist das Stück ACZG = Δ, dessen Grundlinie AG und Höhe GK ist.

Die Grundlinie des Δ ACG aber ist AG und seine Höhe CH, und folglich ist Δ ACG = Δ, dessen Höhe CH und Grundlinie AG ist.

Endlich ist der Kreis-Ausschnitt CAG = Δ, dessen Grundlinie der Bogen CG und Hohe AG (13ten Lehrs. 3tes Cor.), oder dessen Grundlinie AG und Höhe CG ist.

Folglich ist der Kreis-Ausschnitt CAG : Trap. ACZG + Δ ACG = Bogen CG : GK + CH (4, 7. 1.)

Nun ist der Kreis-Ausschnitt CAG < $\frac{2}{3}$ Stück ACZG + $\frac{1}{3}$ Δ ACG (20ten Lehrs. Cor.); folglich ist der Bogen CG < $\frac{2}{3}$ GK + $\frac{1}{3}$ CH.

23ster

*) Siehe vielmehr 5, 13. 4., oder 1, 11. 6.

23ster *Lehrsatz*. 175ste Fig.

Der Umkreis ist kleiner, als zween Drittheile des Umfangs eines um den Kreis beschriebenen Vielecks und zugleich als ein Drittheil des Umfangs eines um den Kreis beschriebenen ähnlichen Vielecks.

Huigens. Pr. 9.

Construktion. CH sey die halbe Seite des in den Kreis beschriebenen Vielecks. Zieht man also ACE; so ist EG die halbe Seite des um den Kreis beschriebenen Vielecks.

Man ziehe BC bis nach K verlängert, und mache LH = HG; folglich BL = BG − LG = 2 (AG − HG) = 2 AH.

Beweis. EG : CH = AG : AH (4, 2.);
folglich EG + CH : CH = AG + AH : AH (3, 8. No. 1.)

Nun ist CH : KG = BH : BG (4, 2.);
folglich EG + CH : KG = (AG + AH) x BH : AH x BG (3, 11.)
oder EG + CH : KG = BH x BH : AH x BG;
folglich
CG + CH : 2KG = BH x BH : 2AH x BG = □ auf BH : Recht. aus BL, BG.

Nun ist das □ auf BH = Recht. aus BH, BL + Recht. aus BH, LH, und das Recht. aus BL, BG = Recht. aus BL, BH + Recht. aus BL, HG. Auch ist das Recht. aus BH, LM > das Recht. aus BL, HG; folglich das □ auf BH > Recht. aus BL, BG;

BG; und $EG + CH > 2 KG$, und $\frac{EG + CH}{3} = 2\frac{KG}{3}$, und $\frac{EG + 2CH}{3} > \frac{2KG + CH}{3}$.

Nun ist der Bogen $CG < \frac{2}{3} KG + \frac{1}{3} CH$ (22ster Lehrsatz); folglich ist dieser Bogen $CG = \frac{2}{3} CH + \frac{1}{3} EG$, und folglich auch der ganze Umkreis $< \frac{2}{3}$ Umfang des Vielecks auf CD $+ \frac{1}{3}$ Umfang des Vielecks auf EF.

1ste *Anmerkung*. Nach der Methode *Archimed's* findet man nur, der Umkreis seye kleiner, als der Umfang des um den Kreis beschriebenen Vielecks. Allein nun weisst man, dass der Umkreis kleiner, als eine Grösse sey, die selbst kleiner als dieser Umfang des Vielecks ist. Man ist also dadurch zu einer grösseren Genauigkeit gelangt.

Corollarium.

Da der Bogen $CG < \frac{2}{3} CH + \frac{1}{3} EG$ *ist; so ist jeder Bogen, welcher kleiner, als der vierte Theil des „Umkreises ist, kleiner als zween Drittheile von der „halben Sehne des doppelten Bogens, und zugleich „als der dritte Theil von der Berührungs-Linie* EG."

2te *Anmerkung*. *Snellius* und *Huigens* bedienten sich des Worts *Sinus* statt der halben Sehne von dem doppelten Bogen; ich werde den Grund hiervon mit dem 13ten Lehrsatze des 8ten Buchs angeben. *).

*) Vergl. ebenfalls 21. 2. 2te Anmerkung in diesem Buche.

3te *Anmerkung.* Dies ſind nun die Lehrſätze, welche *Snellius* zuerſt anzeigte, allein nicht vollſtändig bewieſs. *Huigens* unternahm dieſes Geſchäfte und vollendete es auch. Dadurch kann man mit weit geringerer Weitläuftigkeit zu der nehmlichen Genauigkeit gelangen, die Ludolf mit groſser Mühe erhalten hat. *Huigens* gieng nachher noch weiter, und fügte zween andere Lehrſätze hinzu, die das Geſchäfte noch beträchtlich abkürzen, die aber nicht zu den einfachen Grundwahrheiten der Mathematik gehören, und die ich alſo hier nicht beyfügen kann.

4te *Anmerkung.* Nach den Zeiten des *Ludolf's*, des *Snellius*, und *Huigens* erfand man vermittelſt der ſo genannten *höhern* Mathematik ſolche Methoden, wodurch man die Verhältniſs des Umkreiſes zu ſeinem Durchmeſſer leichter und genauer, und zwar dergeſtalt beſtimmen kann, daſs man, wenn man 1 zum Durchmeſſer annimmt, den ganzen Umkreis durch die folgende Zahl, deren letzte Ziffer zu klein iſt, wird ausdrücken können. Wäre dieſe Ziffer aber um 1 gröſser; ſo wäre eben dieſe folgende ganze Zahl zu groſs:

3, 141, 592^{XX}, 653, 589^{XIX}, 793, 238^{XVIII}, 462, 643^{XVII}, 383, 279^{XVI}, 502, 884^{XV}, 197, 169^{XIV}, 399, 375^{XIII}, 105, 820^{XII}, 974, 944^{XI}, 592, 307^{X}, 816, 406^{IX}, 286, 089^{VIII}, 986, 280^{VII}, 348, 253^{VI}, 421, 170^{V}, 679, 821^{IV}, 480, 865^{III}, 132, 723^{II}, 066, 470^{I}, 938, 446.

Euler Introd. §. 126.

Man wird sich von der allzugrossen Genauigkeit dieses Ausdrucks durch die Beobachtung überzeugen können, dass, wenn man die 21. erste Ciffern dieses Decimal-Bruchs, wovon die drey letztern Ciffern 462 sind, nimmt, und, anstatt ihrer letzten Ciffer 2 die Ciffer 3 setzt, der Unterschied in Rücksicht auf einen Umkreis, welcher so gross, als der der ganzen Erdkugel wäre, noch nicht den 28000'000000sten Theil eines Sandkorns macht, vorausgesetzt, dass 200 neben einander auf eine gerade Linie gelegte Sandkörnchen die Länge eines Zolls betragen.

Siehe *Klinkenberg* in den Verh. van de Haarlemsche Maatsch, III. Deel. p. 156.

5*te Anmerkung.* Da man nun die Gränzen, innerhalb welcher die Verhältniss des Umkreises zu seinem Durchmesser enthalten ist, sehr genau kennt; so kann man auch alle *Verhältnisse* annehmen, die man vorlegen mag, und von welchen man keinen andern Beweis angiebt, als dass man zeigt, sie fallen zwischen dieselbe Gränzen. Auf dieser Grundwahrheit beruhen viele vorgetragene Methoden, um eine Linie, welche einem Kreisbogen gleich seye, zu ziehen, oder ein Quadrat, welches dem Inhalte eines Kreises gleich seye, zu beschreiben. Unter allen derselben will ich folgende zwo anführen, da ihnen ein hoher Grad von Genauigkeit eigen ist:

1ste Methode. Vermöge derselben theilt man eine Linie nach stetiger Verhältniss. Ihr kleinster Theil verhält sich zu ihr, als der ganzen Linie, wie der Durchmesser des Kreises zu fünf Sechstheilen des Umkreises. *Vieta* p. 392. Man nimmt eine Zahl für das kleinste Stük der Linie an, und berechnet vermöge der bekannten Eigenschaft einer auf solche Art geschnittenen Linie, nach welcher nehmlich das Rechteck aus der ganzen Linie und dem kleinern Theile dem Quadrate des grössern Theils gleich ist, den Werth der ganzen Linie. Diesen erhält man ohne Schwierigkeit aus der 6ten und 7ten Anmerkung zu dem 7ten Lehrsatze des 4ten Buchs. Oder man bedient sich der geometrischen Construktion, von welcher in der 9ten Anmerkung zu dem 12ten Lehrsatze des 5ten Buchs die Rede war. Man findet alsdann, dass die Verhältniss des kleinern Theils zu der ganzen Linie von derjenigen Verhältniss, welche man vermittelst der von *Ludolf* gegebenen, als die Verhältniss des Durchmessers zu fünf Sechstheilen des Umkreises erhält, sehr wenig verschieden ist.

Die folgende Methode ist ganz geometrisch.

2te Methode. BCD (176ste Fig.) sey ein halber Kreis, und BC sein vierter Theil. Der rechte Winkel BAC sey in drey Theile getheilt, deren einer der < BAE sey. Diese Theilung geschahe vermittelst der Geometrie.

Er-

Errichte DL und BI ⊥ auf BD. Verlängere AE biſs nach I. Errichte IM ⊥ auf DL. Nehme DL = 3 AB. Ziehe IL. Dieſe Linie nähert ſich dem halben Umkreiſe am meiſten.

Errichte EF ⊥ auf BD. Nehme den Halbmeſſer AB = 1 an. Folglich iſt FE die halbe Sehne eines Winkels = $\frac{2}{3}$ ∠; folglich (2, 7. 1.) FA $= \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}}$.

Nun iſt FA : FE = AB : BI;

folglich $BI = \frac{1}{\sqrt{3}} = DM$; folglich $ML = 3 - \sqrt{\frac{1}{3}}$;

$$\text{und} \quad IL = \sqrt{4 + (3 - \sqrt{\tfrac{1}{3}})^2} = \sqrt{4 + 9 - 6\sqrt{\tfrac{1}{3}} + \tfrac{1}{3}} =$$

$$= \sqrt{\tfrac{39}{3} - \frac{2\sqrt{9}}{\sqrt{3}} + \tfrac{1}{3}} = \sqrt{\tfrac{40}{3} - 2\sqrt{3}}$$

$$= \sqrt{\tfrac{120}{9} - \frac{18\sqrt{3}}{9}} = \tfrac{1}{3}\sqrt{120 - 18\sqrt{3}}$$

Entwickelt man dieſen letztern Ausdruck für IL; ſo erhält man 3, 14153; welches mit der oben angegebenen Zahl ſehr wohl übereinſtimmet.

Koebanski Acta Lipſienſia 1685, p. 397.

24ſter Lehrſatz.

Der Bogen, deſſen Länge dem Halbmeſſer gleich iſt; nähert ſich 57°. 17′. 44, 8″. *am meiſten.* *)

 Be-

*) Ich fand: 57. 3248, etc.

Beweis. Vermöge des 16ten Lehrsatzes, wenn man sich der von *Ludolf* angezeigten Verhältnisses bedient.

25ster Lehrsatz.

Der Inhalt des Kreises verhält sich zu dem Quadrate des Durchmessers, wie 11 : 14, wenn man sich der von Archimed angezeigten Verhältniß bedient.

S. 272ste S. Anhang zur Pr. 23.

Beweis. Vermöge des 2ten Corollariums von dem 13ten Lehrsatze.

1ste Anmerkung. Will man sich der von *Ludolf* angezeigten Verhältnifs bedienen; so verhält sich der Inhalt des Kreises zu dem Quadrate auf dem Durchmesser, wie 0,7853981634 : 1, das heifs, wie 10, 9955742876 : 14. Dies ist von 11 : 14 sehr wenig verschieden.

2te Anmerkung. Nimmt man den Halbmesser = 1, und daher den ganzen Durchmesser = 2 an; so wird der Inhalt des Kreises 3, 4159265 36, und also beynahe 3, 4160 betragen.

3*te Anmerkung.* Bedient man ſich der Grundwahrheit, deren in der 5ten Anmerkung zu dem 23ſten Lehrſatze Erwähnung geſchehen iſt; ſo wird man finden, daſs, wenn man eine Linie nach ſtetiger Verhältniſs ſchneidet, „die ganze Linie nebſt dem kleinern Stücke „ſich zu der doppelten Linie, wie die Wurzel „aus anderthalbmahl dem Halbmeſſer zu der „Seite des Quadrats, welches dem Inhalt des „Kreiſes gleich iſt, verhalte."

Man nimmt an, die Linie ſelbſt ſey $= 1$, und berechnet das kleinere Stück. Man wird finden, daſs man mit der angezeigten Verhältniſs-Gleichheit gerade dasjenige erhalte, was ſich aus der Verhältniſs *Ludolf's* ergiebt.

Hieraus entlehnt man nun die folgende geometriſche Conſtruktion. (177ſte Fig.).

BC und DE ſeyen zween unter rechten Winkeln ſich ſchneidende Durchmeſſer. Man theile AC nach ſtetiger Verhältniſs in H. ziehe EC. Folglich iſt $EC = \sqrt{2}$. Nun nehme $AF = \frac{1}{2} EC$; folglich $AF = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Verlängere BF; folglich iſt $BF = \sqrt{1 + \frac{1}{2}}$ *). Ziehe

*) $BF = \sqrt{1 + \frac{1}{2} EC}$. Es ſollte demnach in dem angeführten Lehrſatze ſtatt der Wurzel aus anderthalbmahl dem Halbmeſſer ſtehen: Wurzel aus dem Halbmeſſer und zugleich aus der halben Wurzel des Durchmeſſers.

FH. Mache BH : BC = BF : BI, das heiſst, ziehe CI || FH. BI wird die Seite des geſuchten Quadrats, und BIKL das Quadrat ſelbſt ſeyn.

Vieta p. 393.

Anhang.

Wie man die Wurzeln aus Zahlen ziehe?

Ich habe bereits in der 1sten und 2ten Anmerkung zu dem 2ten Lehrsatz des 2ten Buchs, und in dem 2ten Corollarium des 13ten Lehrsatzes im 11ten Buch die Gründe, von welchen die Regeln für die Wurzelziehung aus Zahlen abhängen, angegeben, und glaube nun eine geschickte Gelegenheit gefunden zu haben, um darthun zu können, wie man jene Regeln von den angeführten Sätzen in der That abgeleitet.

Aus einer Zahl die Quadrat- oder Cubic-Wurzel ziehen, heisst die Zahl finden, die, ein- oder zwey-mal mit sich selbst multiplicirt, die gegebene Zahl wieder herausbringt.

Die

Die Zahl, welche man Wurzel heißt, kann aus so vielen Theilen zusammengesetzt betrachtet werden, als es Ciffern giebt. Die Wurzel 376 *zum Beyspiel besteht also aus drey Theilen* 300, 70 *und* 6, *oder aus* 3, 7, 6, *indem man nehmlich nicht vergißt, daß jede Ciffer einen zehnfachen Werth im letztern Falle erhält, wenn man ihr zur rechten Seite die andere Ciffer beyfügt.*

Die Regel besteht nun aus zween Theilen: 1*stens, muss man die Anzahl der Ciffern, welche die Wurzel angeben, bestimmen;* 2*tens, jede von diesen Ciffern insbesondere finden.*

1stens. Ueber die Quadrat-Wurzel.

Die Quadrat-Wurzeln aller Zahlen zwischen 1 *und* 100 *haben eine Ciffer. Die Quadrat-Wurzeln der Zahlen zwischen* 100 *und* 10,000 *haben zwo Ciffern. Die Quadrat-Wurzeln der Zahlen zwischen* 10,000 *und* 1,000,000 *haben drey Ciffern u. s. w. Man kann also immer wissen, aus wie viel Ciffern die Quadrat-Wurzel einer gegebenen Zahl bestehen wird. Man hat bloß die gegebene Zahl von der rechten Hand an in Abschnitte, deren jeder zwo Ciffern enthalte, zu theilen. Wird daher die Anzahl der Ciffern eine ungerade Zahl seyn; so wird der letzte Abschnitt nur eine Ciffer enthalten. Die Wurzel wird so viele Ciffern (und also Theile) haben, als man Abschnitte gemacht hat.*

Jedes Paar Ciffern der gegebenen Zahl giebt daher für die Wurzel eine Ciffer; *und jeder Abschnitt der gegebenen Zahl hat in Beziehung auf den folgenden einen hundertfachen Werth, so wie jede Ciffer von der Wurzel in Rücksicht auf ihre vorhergehende Ciffer einen zehnfachen Werth hat* *).

Um nun aus einer gegebenen Zahl die Wurzel zu ziehen; so hat man nur auf den Ausdruck $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = a^2 + (2a+b)b$ *Acht zu geben, und die gegebene Zahl mit ihm zu vergleichen.*

Ich möchte zum Beyspiel aus 1764 *die Quadrat-Wurzel ziehen. Ich theile die Zahl in Abschnitte von zwoen zu zwoen Ciffern auf folgende Art:* 17|64. *Durch diese Abtheilung erfahre ich, daß die Wurzel aus zwoen Ciffern bestehen wird. Ich werde eine von ihnen mit* a, *die andere mit* b *vergleichen.*

Ich vergleiche also 17|64 *mit* $a^2 + 2ab + b^2$, *und zwar* 17 (*das heißt in diesem Falle* 1700) *mit* a^2. *Das Quadrat, das sich* 17 (*oder* 1700) *am meisten nähert, ist* 16 (*oder* 1600) *wovon die Wurzel* 4 (*oder* 40

*) Beyspiel: Der erste Abschnitt der Zahl 17|64 hat an und für sich betrachtet 17 und der zweyte 64. Wenn ich aber den ersten mit dem zweyten vergleiche; so ist jener in Beziehung auf diesen nicht 17, sondern 1700, folglich hundertmal gröſser, als die Zahl 17 es für sich allein wäre. Eben so ist die erste Ciffer der Wurzel 42 von der gegebenen Zahl 1764 an und für sich betrachtet 4 und ihre zwote Ciffer 2. Wenn ich aber die erste mit der zwoten vergleiche; so wird die erste 40 seyn und in Rücksicht auf die zwote einen zehnfachen Werth haben.

40) *ist.* *Ich nehme also* 4 (*das heißt* 40) $=a$ *als den ersten Theil der Wurzel an, ziehe das Quadrat von* 4 $=16$ (*oder* 1600) *von* 17|64 *ab.* *Der Rest* 164 *wird* $=2ab+b^2=(2a+b)b$ *seyn.* *Nun nehme ich das Doppelte von* 4 (*oder von* 40), *das heißt,* 8 (*oder* 80). *Ich vergleiche dieses Produkt mit* 2a, *theile damit* 16 (*oder* 160), *das heißt* 2ab. *Der Quotient* 2 *ist wahrscheinlich die zwote Ciffer der Wurzel, oder* b; *denn* $\frac{2ab}{2a}=b$. *Ich setze also* 2 *neben* 8, *das heißt, ich füge* 2 *zu* 80 *hinzu; oder ich nehme* $2a+b$, *multiplicire* 82 *mit* 2 (*das heißt* $(2a+b)$ *mit* b), *erhalte* 164, *welches Produkt ich mit* $2ab+b^2$ *vergleiche.* *Da es dem Rest* 164 *gleich ist; so bleibt nach dem Abziehen nichts übrig.* *Folglich ist* 42 *die Wurzel aus* 1764. *Ich setze hier die ganze Operation bey, wie man sie in der Ordnung vorgenommen hat:*

	Zahl	Wurzel
$a^2+2ab+b^2=$	17\|64	(42 $=a+b$
$a^2=$	1600	(82 $=2a+b$
$2ab+b^2=$	164	$2=b$
$(2a=$	80)	$164=2ab+b^2$
$2ab=$	160	
$b^2=$	4	
$2ab+b^2=$	164	
	0	

Ich sagte, der Quotient sey wahrscheinlich die zwote Ciffer der Wurzel; denn wenn 82×2 *grösser als der Rest* 164 *gewesen wäre; so würde man bemerkt*

merkt haben, daß 2 zu groß sey. Man hätte also anstatt 2 eine kleinere Ciffer nehmen müssen.

Hat die Wurzel drey oder mehrere Ciffern; so verfährt man auf die bereits angezeigte Art. Man denkt sich, um die dritte Ciffer zu finden, die zwo erste Ciffern nach dem Ausdruck $(a+b+c)^2 = \overline{a+b}^2 + 2(a+b) \times c + c^2$. *Hat man nun die zwo erste Ciffern gefunden; so ist man mit dem ersten Theile* $\overline{a+b}^2$ *in Richtigkeit. Die übrige Ciffern der gegebenen Zahl sind* $= 2(a+b) \times c + c^2$. *Zur Findung der vierten Ciffer denkt man sich die gefundene drey erste Ciffern als eine, und geht immer so weiter.*

Regel.

1stens. Theile die gegebene Zahl (zum Beysp. 488601) von der rechten Hand aus in Abschnitte, deren jeder zwo Ciffern enthalte: (48|86|01.)

2tens. Nimm das Quadrat (36), *welches sich der Zahl* (48) *vom ersten Abschnitte am meisten nähert, ziehe es von dieser Zahl ab, und zeichne den Rest* (12) *an. Die Wurzel* (6) *des genannten Quadrats ist die gesuchte Ciffer der Wurzel.*

3tens. Setze die Ciffer des folgenden Abschnittes (86) *neben den Rest herunter; und betrachte diese Zahl* (1286) *als eine Zahl.*

4tens. Nimm das Doppelte (12) *von der gefundenen Ciffer* (6) *der Wurzel. Dividire damit die Zahl No. 3.; indem du die letzte Ciffer nicht in Be-*

tracht

trachtung mitziehst (folglich in dem gegebenen Falle 128). *Zeichne den Quotienten* (9) *als die neue Ciffer der Wurzel an.*

5*tens. Setze den nehmlichen Quotienten* (9) *neben die doppelte Zahl No.* 4. *Multiplicire sodann diese Zahl* (129) *als eine Zahl, mit jenem Quotienten oder jener neuen Ciffer* (9) *der Wurzel. Ziehe das Produkt* (1161), *das durch die verlangte Multiplication herauskömmt, von dem Rest No.* 3. *ab, und zeichne den Rest* (125) *an.*

6*tens. Giebt es noch mehrere Ciffern in der gegebenen Zahl; so setzt man die zwo Ciffern des folgenden Abschnitts (in dem gegebenen Falle* 01) *neben den genannten Rest* (125), *und betrachtet diese Zahl als eine Zahl* (12501).

7*tens. Hierauf betrachtet man die bereits gefundene Ciffern* (69) *der Wurzel als eine Ciffer, und fährt nach NN.* 4, 5 *und* 6 *fort, bis man mit allen Abschnitten der gegebenen Zahl an's Ende gekommen ist. Bleibt nun kein Rest übrig; so ist die gegebene Zahl eine Quadrat-Zahl, deren Wurzel die gefundene Zahl ist.*

8*tens. Bleibt ein Rest übrig; so setzt man so viele Paar Nullen neben den Rest, als man Decimal-Ciffern zur Annäherung in der Wurzel haben möchte. Man betrachtet alsdann jedes Paar Nullen als einen neuen Abschnitt der gegebenen Zahl, den man nach NN.* 4, 5 *und* 6 *behandelt.*

9'*ens.* *Hat man einen Bruch (zum Beysp.* $\frac{16}{81}$*); so sucht man die Wurzeln so wohl aus dem Zähler, als dem Nenner, und bringt sie unter einen Bruch* ($\frac{4}{9}$)*, der die verlangte Wurzel giebt* *). *Oder man bringt den Bruch, wenn der Zähler und Nenner keine Quadrat-Zahlen sind, auf einen Decimal-Bruch, woraus man die Wurzel zieht.*

Hier sind drey ausgeführte Beyspiele:

1*stes Beyspiel. Die Wurzel aus* 488601 *zu ziehen.*

$a^2 + 2ab + b^2 =$	48\|8601	(699 = a + b	
$a^2 =$	36	(12.9	138.9 = 2a + b
$2ab + bb =$	1286	9	9 = b
$(2a =$	120)	1161	12501 = 2ab + bb
$2ab =$	1080		
$b^2 =$	81		
$2ab + bb =$	1161		
$2ab + bb =$	12501		
$(2a =$	1380)		
$2ab =$	12420		
$b^2 =$	81		
$2ab + b2 =$	12501		
	0		

2tes

*) Die Wurzel des Zählers wird nehmlich der Zähler, die Wurzel des Nenners der Nenner dieses Bruchs.

2tes Beyspiel. Die Wurzel aus 300 zu ziehen.

$3|00$ $(17.3205 = a + b$

1 $(2.7 \mid 34.3 \mid 346.2 = 2a + b$

200 $7 \mid 3 \mid 2 = b$

(20) $189 \mid 1029 \mid 6924 = 2ab + b^2$

140 $3464.05 = 2a + b$

49 $5 = b$

189 $1732025 = 2ab + b^2$.

1100 Die Wurzel nähert sich sehr:

(340) 17.3205.

1020

9

1029

7100

$(2a = 3460$

$2ab = 6920$

$b^2 = 4$

$2ab + b^2 = 6924$

$2ab + b^2 = 17600$

$(2a = 34640)$

$2ab + b^2 = 1760000$

$(2a = 346400)$

$2ab = 1732000$

$b^2 = 25$

$2ab + b^2 = 1732025$

27975 *).

3tes

*) Der Raum erlaubte mir nicht, den allgemeinen Ausdruck überall beyzusetzen. Ich rathe aber allen Anfängern, ihn immer als ihr Beyspiel zu nehmen.

3tes Beyspiel. *Die Wurzel aus* 0,273, *das heißt, aus* $\frac{273}{1000}$ *zu ziehen.*

Da der Nenner keine Quadrat-Zahl ist; so multiplicire ich so wohl den Zähler, als Nenner mit 10. *Der Bruch wird* $\frac{2730}{10000}$. *Folglich wird der Nenner der Wurzel* = 100 *seyn, das heißt, man erhält Hundert-Theile. Zieht man die Wurzel aus* 2730; *so erhält man:*

$$\begin{array}{rr}
 & 27|39 \\
a^2 = & \underline{25} \\
2ab+b^2 = & 2'30 \\
(2a = & 100) \\
2ab = & 200 \\
b^2 = & 04 \\
\hline
2ab+b^2 = & 204 \\
\hline
2ab+b^2 = & 2600 \\
(2a = & 1040) \\
2ab = & 2080 \\
b^2 = & 4 \\
\hline
2ab+b^2 = & 2084 \\
\hline
 & 516
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rl}
(0522\ \text{u. s. w.} & = a+b \\
\hline
(\ 102|1042 & = 2a+b \\
2|\quad\ \ 2 & = b \\
\hline
204|2084 & = 2ab+b^2
\end{array}$$

Folglich ist die Wurzel grösser, als 0,52, *oder als* 0,522, *und man kann ihr vermittelst des fortgesetzten Verfahrens so viel, als man will, näher kommen.*

2tens. Ueber die Cubic-Wurzel.

Die Cubic-Wurzeln aller Zahlen zwischen 1 *und* 1000 *haben eine Ciffer. Die Cubic-Wurzeln der Zahlen zwischen* 1,000 *und* 1,000,000 *haben zwo Ciffern. Die Cubic-Wurzeln der Zahlen zwischen* 1,000,000 *und* 1,000,000,000 *haben drey Ciffern, u. s. w., so daß man immer wissen kann, wie viele Ciffern die Cubic-Wurzel einer gegebenen Zahl haben wird. Man hat nicht mehr zu thun, als daß man die Zahl von der rechten Hand aus in Abschnitte zu dreyen Ciffern theile. Ist daher die Anzahl der Ciffern von der gegebenen Zahl nicht durch* 3 *theilbar; so wird der letzte Abschnitt zur linken Hand nur eine oder zwo Ciffern enthalten.*

Drey Ciffern von der gegebenen Cubic-Zahl geben daher jedesmal eine Ciffer für die Wurzel, und jeder vorhergehende Abschnitt hat in seinen Zahlen einen tausendfachen Werth in Beziehung auf den folgenden Abschnitt. Eben so hat jede vorhergehende Ciffer der Wurzel einen zehnfachen Werth in Rücksicht auf die folgende Ciffer.

Um nun aus einer gegebenen Zahl die Cubic-Wurzel zu ziehen; so hat man blos auf den Ausdruck (11, 13. 2.) $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + 3ab(a+b) + b^3$ *seine Aufmerksamkeit zu richten, und die gegebene Zahl mit demselben zu vergleichen.*

Ich möchte aus 74088 *die Cubic-Wurzel ziehen. Ich theile die gegebene Zahl auf diese Art* 74|088 *in Abschnitte. Ich lerne hieraus, daß die Wurzel zwo Ciffern haben wird, und vergleiche eine dieser Ciffern mit* a, *die andere mit* b.

Ich

Ich vergleiche also auch 74|088 *mit* $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, *und zwar* 74 (*oder* 74000) *mit* a^3. *Die Cubic-Zahl, welche* 74 (*oder* 74000) *am nächsten kömmt, ist* 64 *) (*oder* 64,000), *wovon die Wurzel* 4 (*oder* 40) *die erste Ciffer der gesuchten Wurzel ist. Ich ziehe diese Cubik-Zahl von* 74|088 *ab. Der Rest ist:* $10088 = 3a^2b + 3ab^2 + b^3$. *Ich nehme das Quadrat der bereits gefundenen Ciffer* 4 (*oder* 40), *nehmlich* 16 (*oder* 1600), *multiplicire es mit* 3, *und erhalte* 48 (*oder* 4800). *Diese Zahl vergleiche ich mit* 3a; *theile* 100 *mit diesen* 48 (*oder* 10088 *mit* 4800), *und erhalte* 2 *als Quotienten. Dieser Quotient ist* w a h r s c h e i n l i c h *die zwote Ciffer der gesuchten Wurzel, weil* $\frac{3a^2b}{3a^2} = b$. *Ich setze daher* 2 *neben die erste Ciffer und habe* 42.

Nun multiplicire ich das dreyfache Quadrat der ersten Ciffer, (*in diesem Falle* 48) *mit der zwoten Ciffer. Das Produkt ist* 96 (*oder* $9600 = 3a^2b$). *Eben so multiplicire ich das dreyfache Quadrat* 12 *der zwoten Ciffer* 2 *mit der ersten Ciffer* 4. *Das Produkt ist* 48 ($480 = 3ab^2$); *und nehme den Cubus der zwoten Ciffer* 2. *Das Produckt ist* $8 = b^3$. *Ich addire die drey Produkte* (96, 48, 8) *zusammen, indem ich wohl darauf Acht gebe, daß ich das zweyte Pro-*

*) Man wird wohl daran thun, sich von den Würfeln der 10 ersten Zahlen ein Täfelchen zu berechnen, und beym Wurzelziehen aus Cubic-Zahlen immer vor sich liegen zu haben. Ich theile es hier mit:

Würfeln	1.	8.	27.	64.	125.	216.	343.	512.	729.	1000.
Wurzeln	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.

Produkt eine Ciffer weiter nach der rechten *) *Hand, als das erste, und das dritte Produkt eine Ciffer weiter nach eben dieser rechten Hand, als das zweyte* **) *setze. Die Summe* 10088 *ist* $= 3a^2b + 3ab^2 + b^3$. *Ich ziehe die Summe von dem gegebenen Rest ab, und bemerke, daß nichts übrig bleibt. Ich schließe hieraus, daß* 42 *die gesuchte Wurzel ist. Hier wiederhohle ich die ganze Operation:*

$$
\begin{array}{rrl}
a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 = & 74|088 & |\underline{42} = a+b \\
a^3 = & \underline{64|\quad} & |16{,}4|8 = b^3 \\
3a^2b+3ab^2+b^3 = & 10088 & \underline{3\ 3} \\
(3a^2 = & 4800) & 4812 = 3b^2 \\
3a^2b = & 9600 & \underline{2\ 4} = \underline{a} \\
3ab^2 = & 480 & 9648 = 3ab^2 \\
3a^2b+3ab^2+b^3 = & & \underline{8\ 48\ 8} \\
b^3 = & \underline{10088} & \underline{10088} \\
 & 0 &
\end{array}
$$

Ich

*) 96 ist ja eigentlich 9600, und 48 ist nur 480; oder da die erste Ciffer überhaupt einen zehnfachen Werth von dem hat, was sie in abstracto zu haben scheint; so wird das Quadrat dieser Ciffer in Rücksicht auf das Produkt des Quadrats von der zwoten mit ihr, nehmlich der ersten selbst, einen zehnfachen Werth haben.

**) 48 ist eigentlich 480. Da überhaupt die erste Ziffer in der That einen zehnfachen Werth hat; so hat auch das Produkt dieser Ciffer mit dem Quadrate der zwoten Ciffer in Rücksicht auf das Produkt eben dieses Quadrats mit der nehmlichen Ciffer, das heisst, in Rücksicht auf den Cubus der zwoten Ciffer einen zehnfachen Werth.

Ich habe gesagt, daß 2 wahrscheinlich die zwote Ciffer der Wurzel wäre, denn wenn jene Produkte und der Cubus größer als der Rest 10,088 *gewesen wären; so würde dies ein Zeichen seyn, daß* 2 *als zwote Ciffer zu groß wäre. Ich hätte eine kleinere Zahl dafür nehmen müssen.*

Hat die Wurzel drey oder mehrere Ciffern; so verfährt man auf die nehmliche Art, und betrachtet die bereis gefundene Ciffern nach dem Ausdruck $(a+b+c)^3 = (a+b)^3 + 3\ (a+b)^2 \times c + 3\ (a+b) \times c^2 + c^3$ *als eine Zahl. Eben dies gilt für die vierte, fünfte Ciffer* u. s. w. *Hievon leitet man nun die folgende Regel ab, welche ich zugleich auf ein Beyspiel anwenden werde.*

Regel.

1*stens. Theile die gegebene Zahl* (5,268,024) *von der rechten Hand aus in Abschnitte von dreyen Ciffern.*

2*tens.* Nimm *den Cubus* (1), *welcher sich der Zahl* (5) *des ersten Abschnitts zur linken Hand am meisten nähert. Ziehe ihn von dieser Zahl ab, und zeige den Rest* (4) *an. Die Wurzel* (1) *jenes Cubus ist die gesuchte Ciffer für die Wurzel.*

3*tens. Setze die Ciffern* (268) *des folgenden Abschnitts neben jenen Rest* (4), *und betrachte diese Ciffern zusammen als eine Zahl* (4268).

4*tens. Nimm das Quadrat* (1) *jener ersten Ciffer; multiplicire es mit* 3. *Dividire die No.* 3. *an-*

gezeigte Zahl mit Ausschlus der zwo letzten Ciffern (68) *mit diesem Produkte* (3). *Der Quotient* (*in diesem Falle* 7) *) *ist* **wahrscheinlich** *die folgende Ciffer der Wurzel.*

5tens. *Multiplicire das dreyfache Quadrat* (3) *der bereits zuvor gefundenen Ciffer mit der aufs neue nach* No. 4. *gefundenen Ciffer* (7). *Multiplicire das Quadrat* (49) *dieser gefundenen Ciffer* (7). *mit* 3, *und dieses herausgekommene Produkt* (147) *mit der zuvorgefundenen Ciffer* (1). *Nimm den Cubus* (343) *der zuletzt gefundenen Ciffer* (7). *Addire die drey Produckte, nachdem du das zweyte Produckt eine Ciffer weiter nach der rechten Hand zu, als das erste Produckt, und das dritte Produkt eine Ciffer weiter gegen die rechte Hand hin, als das zweyte Produkt gesetzt haben wirst. Ziehe die Summe* (3913) *von dem* No. 3. *genannten ganzen Reste ab, und zeige den neuen Rest* (355) *an.*

6tens. *Sind noch mehrere Ciffern von der gegebenen Zahl übrig; so setze den folgenden Abschnitt* (*nach dem gegebenen Falle* 024) *neben den zuletzt gefunde-*

*) 5 ist zwar in 42 vierzehnmal enthalten. Allein man kann nicht mehr als 9 zum Quotienten machen. Würde man nun 9 als Quotienten annehmen; so würde man nach dem *No.* 5. angegebenen Verfahren finden, dass nicht nur 9, sondern auch 8 für denselben zu gross wäre. Man muss bey diesem Falle den Quotienten beynahe immer viel kleiner nehmen, als es dem ersten Ansehen nach scheinen möchte.

fundenen Rest (355), *und betrachte diese ganze Zahl als eine Zahl* (355024).

7tens. *Betrachte auch die bereits gefundene Ciffern* (17) *der Wurzel als eine Ciffer, und verfahre sodann ferner nach NNs.* 4, 5, 6, *bis du alle Abschnitte der Zahl auf gleiche Art behandelt haben wirst. Bleibt alsdann kein Rest übrig; so ist die gegebene Zahl eine Cubic-Zahl, deren Wurzel die gefundene Zahl* (174) *ist.*

8tens. *Bleibt ein Rest übrig; so setze hinter die Zahl so viel mahl drey Nullen, als du zur Annäherung in der Wurzel decimalen nöthig zu haben glaubst. Betrachte jede Drey-Zahl Nullen als einen neuen Abschnitt der gegebenen Zahl, und verfahre nach* NNs. 4, 5, 6.

9tens. *Hast du einen Bruch (zum Beysp.* $\frac{64}{125}$); *so nimm die Cubic-Wurzeln* (4 *und* 5) *sowohl von dem Zähler, als von dem Nenner besonders, und mache einen neuen Bruch mit ihnen* ($\frac{4}{5}$) *). *Dieser Bruch ist die Cubic-Wurzel des gegebenen Bruchs. Oder bringe (wenn der Zähler und Nenner keine Cubic-Zahlen sind) den Bruch auf einen Decimal Bruch, indem du den Zähler so weit ausdehnest, oder (ist dieser bestimmt) so viele Nullen beyfügest, als du nöthig hast, um den Nenner nach jenem Hinzufügen von Nullen zu einer Cubic-Zahl zu machen. Behandle sodann den Zähler als eine ganze Zahl.*

 Ich

*) Die Wurzel des Nenners wird der Nenner des Wurzel-Bruchs, und die Wurzel des Zählers wird sein Zähler seyn. *Anm. des Uebers.*

Ich füge hier noch die Behandlung des ersten Beyspiels bey.

$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 =$	5 \| 268 \| 024	$174 = a + b$
$a^3 =$	1	
$3a^2b + 3ab^2 + b^3 =$	4 268	
$(3a^2 =$	300)	
$3a^2b =$	2100	
$3ab^2 =$	1470	
$b^3 <$	343	
$3a^2b + 3ab^2 + b^3 =$	3913	
$3a^2b + 3ab^2 + b^3 =$	355 024	
$(3a^2 =$	86700)	
$3a^2b =$	346800	
$3ab^2 =$	8160	
$b^3 =$	64	
$3a^2b + 3ab^2 + b^3 =$	355024	
	0	

Nebenrechnungen:

1
$1^2 = 1$
× 3
3
× 7
21
147
343
3913

$7^2 = 49$
× 3
147
× 1
147
$7^3 = 343$

17
$17^2 = 289$
× 3
867
× 4
3468
816
64
355024

$4^2 = 16$
× 3
48
× 17
816
$4^3 = 64.$

Auf-

Aufgaben
aus den
Anfangsgründen
der
Meſskunde.

Aufgaben

aus den

Anfangsgründen der Meſskunde.

Erklärung.

Man ſagt, zufolge der Alten, von einem Problem oder Aufgabe, daß man es im ſtrengſten Sinne geometriſch auflöſſe, wenn man ſeine Auflößung blos mit Hülfe gerader Linien und Kreiſe, das heißt, allein mit dem Lineal und Cirkel verrichtet.

Anmerkung. Ich bediente mich der Ausdrücke: *zufolge der Alten*, *und im ſtrengſten Sinne*. Allein man nimmt ſeit den Zeiten des *Carteſius* den Ausdruck von *geometriſcher Auflöſſung* in einem weitläuftigern Sinne. Man nennt nun nicht nur diejenige Auflöſsungen, welche ver-

vermittelst des Kreises und einer geraden Linie geschehen, sondern auch diejenige Auflösungen, welche man vermittelst so genannter *geometrischer Linien*, dergleichen die *Kegelschnitte* sind, verrichtet, *geometrische* Auflosungen. Ich werde hier bloss mit der geometrischen Auflösung im Sinne der Alten zu thun haben.

Ich nehme daher folgende drey Wahrheiten an:

1stens.

Daß man von einem gegebenen Punkte eine gerade Linie und zwar unbestimmt oder zu einem andern gegebenen Punkte, oder auf die Art ziehen könne, daß jene gerade Linie einer andern gegebenen Linie gleich sey.

2tens.

Daß man eine Linie nach Belieben verlängern

3tens.

Daß man mit einem gegebenen Halbmesser von einem gegebenen Punkte aus einen Kreis beschreiben könne.

Er-

Erstes Buch.

Ueber die geraden Linien.

1ste Abtheilung.

Ueber die gleichen Linien, die Lothlinien und die Parallel-Linien.

1ste Aufgabe. 1ste Fig.

Von einem gegebenen Punkte C *aus eine einer gegebenen* Linie AB *gleiche gerade Linie zu ziehen.*

Eukl. 1, 2.

Auflößung. Vermittelst der 3ten Annahme (Hypothese) und des 6ten *Grundsatzes* vom 1sten Buche. Man zieht nehmlich Kreise aus A und C mit CA als Halbmesser; aus A mit AB als Halbmesser, aus D mit DF als Halbmesser.

Anmerkung. Dies ist die *Euklidische* Auflösung. Allein ich meine, es sey eben so mathematisch gesagt: „Beschreibe aus C mit einem AB gleichen Halbmesser einen Kreisbogen. Ziehe GC von dem Umkreis nach dem Mittelpunkte. Sie ist die verlangte Linie.“ Auf diese Art verfährt man immer in der Ausübung.

2te Aufgabe. 2te Fig.

Man soll, wenn zwo gerade Linien AB *und* C *gegeben sind, von der größten* AB *ein Stück* AE *abschneiden, das der kleinsten gleich sey.*

Eukl.

Eukl. I, 3.

Auflösung. Man mache vermittelst der 1sten Aufgabe AD=C, und verfährt weiter nach der 3ten Annahme.

Anmerkung. Man findet diese Auflösung ebenfalls bey *Euklid.* Sollte man nicht eben so mathematisch sagen: „ dass man aus A mit „dem Halbmesser AE, welcher C gleich sey, „einen Kreisbogen DEF beschreiben solle?" Man verfährt in der Ausführung immer auf die genannte Art.

3te Aufgabe. 3te Fig.

Aus einem gegebenen Punkte C *in einer gegebenen Linie* ED *eine Linie* CF *zu ziehen, welche auf der gegebenen Linie* ED *lothrecht stehe.*

Eukl. I, II. W. g. §. 94. *) — St. 27ste S. 9te Pr.

Auflösung. Man nimmt CB nach Belieben; CA=CB; und verfährt nach der 3ten Annahme und dem 6ten Grundsatz des 1sten Buchs.

Construktion für den Beweis. Man zieht FB, FA.

Beweis. Mit dem 4ten Corollarium des 11ten Lehrsatzes im ersten Buche. — Oder aus der Betrach-

*) In der lat. Quart-Ausgabe G. §. 212. Probl. 16.

trachtung der Dreyecke AFC und CFB nach dem 12ten Lehrsatze des 1sten Buchs.

4te Aufgabe.

Auf den Endpunkt B *einer gegebenen Linie* AB *eine senkrechte Linie* BD *aufzurichten.*

W. g. §. 119.

1ste Auflösung. 4te Fig. Man verlängere AB, und verfahre nach der vorhergehenden Aufgabe.

Construktion für den Beweis. Man ziehe DK, DI.

Beweis. Mit dem 4ten Corollarium des 11ten Lehrsatzes im 1sten Buche.

2te Auflösung. 5te Fig. Man nehme einen Punkt A; verfahre aus A und B nach der 3ten Annahme und dem 6ten Grundsatze des ersten Buchs; sodann abermals aus C. Man ziehe ACD, und sodann BD. *)

Beweis. Mit dem 5ten Lehrsatz im 5ten Buch.

5te

*) Es scheint mir nicht einmal nothwendig zu seyn, dass man aus B und nach dem 6ten Grundsatze des 1sten Buchs verfahre, wenn man nur den Mittelpunkt und den Durchmesser nebst der Kreis-Linie ABFDGA hat.

5te Aufgabe. 6te Fig.

Aus einem Punkte F *ausserhalb einer gegebenen geraden Linie* AB *auf diese Linie eine Lothlinie* FH *zu ziehen.*

Eukl. 1, 12. — W. g. §. 95. *) — St. 28ste S. 10ter S.

Auflößung. Zuerst verfahre man aus F nach der 3ten Annahme; sodann ebenfalls nach dieser Annahme nach dem 6ten Grundsatze des 1sten Buchs aus D und E. Man zieht FHG, welche die gesuchte Linie ist.

Construktion für den Beweis. Man ziehe FD, FE, GD, GE.

Beweis. Vermöge des 3ten Corollariums des 12ten Lehrsatzes im 1sten Buche.

6te Aufgabe. 7te Fig.

Aus einem gegebenen Punkte E *eine Linie* EG *zu ziehen, welche mit einer gegebenen Linie* IM *parallel sey.*

Eukl. 1, 31. — W. g. §. 91. *) — St. 39ste S. 19ter S.

1ste Auflösung. Zuerst aus E vermittelst der 5ten Aufgabe, hernach aus irgend einem Punkte D ver-

*) S. in der angef. Ausg. O. §. 216. Probl. 17.

**) — — — §. 258. Probl. 20.

vermittelst der 3ten und 1sten Aufgabe. Man ziehe endlich durch E und K die Linie EG, welche die gesuchte Linie ist.

Construktion für den Beweis. Man ziehe ED.

Beweis. Vermöge des 4ten und 8ten, oder vermöge des 18ten Lehrsatzes aus dem 1sten Buche.

2te Auflösung. Man ziehe ED nach Belieben, und verfahre aus D nach der 3ten Aufgabe des 2ten Buchs.

Beweis. Vermöge des 4ten Lehrsatzes im 1sten Buche.

2te Abtheilung.

Ueber die Theilung der Linien.

7te Aufgabe. 6te Fig.

Eine gegebene Linie DE *in zween gleiche Theile* EH, HD *zu theilen.*

Eukl. 1, 10. — W. g. §. 120. *) — St. 26ste S. 8ter S.

Auflösung. Man verfahre zweymal aus den beeden Endpunkten E und D nach der 3ten Annahme

*) S. die angef. Ausg. G. §. 210. Probl. 15.

me und dem 6ten Grundsatz des 1sten Buchs, so daſs sich zween Kreisbogen in F, zween andre aber über oder unter der Linie AB in G schneiden. Man ziehe FG, welche die gesuchte Linie ist.

Construktion für den Beweis. Man ziehe FD, FE, DG, GE.

Beweis. Vermöge des 3ten Corollariums des 12ten Lehrsatzes im 1sten Buch.

8te Aufgabe.

Eine gegebene gerade Linie BA *in so viel gleiche Theile* BR, RS *u. s. w., als man will, zu theilen.*

Clavius zum 10ten Satz des 6ten Buchs von **Euklid.** — W. g. §. 190.*)

1ste Auflösung. *8te Fig.* Vermittelst der 1sten Annahme, und nachdem man HA gezogen haben wird, vermittelst der 6ten Aufgabe.

Beweis. Vermöge des 20sten Lehrsatzes im 1sten Buch: oder vermöge des 1sten Lehrsatzes im 4ten Buch.

2te Auflösung. *9te Fig.* Vermittelst der 6ten Aufgabe, und sodann der 1sten Annahme.

Beweis. Vermöge des 2ten Lehrsatzes im 4ten Buch.

Anmerk.

*) S. die angef. Ausg. G. §. 274. Probl. 23.

Anmerk. Das Verfahren vermittelst des Proportional-Cirkels bey dieser Aufgabe stimmt mit dieser zwoten Auflösung überein.

9te Aufgabe. 10te Fig.

Von einer gegebenen Linie AB *einen bestimmten Theil* AD *abzuschneiden.*

Eukl. 6, 9.

Auflösung. Vermittelst der 1sten Auflösung der 8ten Aufgabe.

Beweis. Vermöge des 20sten Lehrsatzes vom 1sten Buch, — oder vermöge des 1sten Lehrsatzes im 4ten Buche.

Anmerk. In diesem Falle ist der Proportional-Cirkel von grossem Nutzen in der Ausübung.

10te Aufgabe. 11te Fig.

Eine gegebene Linie AB *in derselben Verhältniß zu theilen, in welcher eine andere gegebene Linie* AC *(in* DE) *getheilt worden ist.*

Eukl. 6, 10. — W. g. §. 191. *)

Auflösung. Vermittelst der 6ten Aufgabe.

Beweis. Vermöge des 1sten Lehrsatzes im 4ten Buche.

*) In der angef. Ausgabe G. §. 271. Probl. 22.

11te Aufgabe. 12te Fig.

Eine gegebene gerade Linie FE *auf diese Art (in* I) *zu schneiden, daß sich ihre Theile* EI, FI *in der Verhältniß zwoer gegebener Linien* AB *und* CD *zu einander verhalten.*

Clavius zum 10ten Satz des 6ten Buchs von *Euklid.* P. 557.

Auflößung. Zuerst aus F vermittelst der 1sten Aufgabe, hernach aus E vermittelst der 6ten und 2ten Aufgabe. Endlich ziehe GH. I ist der gesuchte Punkt.

Beweis. Vermöge des 2ten Lehrsatzes im 4ten Buch.

12te Aufgabe. 13te Fig.

Eine gegebene Linie AB *auf folgende Art in* E *zu schneiden, daß das Rechteck aus der ganzen Linie* AB *und dem kleinsten Theil* AE *dem Quadrat auf dem grösten Theil* BE *gleich sey.*

Oder, was auf das Nehmliche hinausläuft. (4 *Buchs 2te Erklärung): eine gegebene Linie* AB *nach stetiger Verhältniß-Gleichheit zu theilen.*

Eukl. 2, 11, und 6, 30. — St. 86ste S, 11ter S.

Auflösung. Man richte nach der 4ten Aufgabe in B die Linie CBD auf; mache vermittelst der 7ten und 1sten Aufgabe CB = ½ AB; hierauf verfahre man nach der 3ten Annahme zuerst aus C, sodann aus B.

Be-

Beweis. □ auf AC = □ auf AB + □ auf BC (2, 7.)
= 4 □ auf BC + □ auf BC (2, 2. 1.)
= 5 □ auf BC;
□ auf AC = □ auf CD =
= □ auf BC + □ auf BD + 2 ▭ aus BC. BD (2, 2.)
= □ auf BC + □ auf BE + ▭ aus AB. BE;
folglich 5 □ auf BC = □ auf BC + □ auf BE + ▭ aus AB. BE;
und 4 □ auf BG = □ auf BE + ▭ aus AB. BE;
folglich □ auf AB — ▭ aus AB. BE = □ auf BE;
folglich ▭ aus AB und (AB — BE) = □ auf BE (2, 1. 3.);
oder ▭ aus AB. AE = □ auf BE. *).

13*te Aufgabe.* 14*te Fig.*

Es seyen zwo gleiche oder ungleiche gerade Linien AB *und* CD *gegeben, man soll eine von ihnen* CD *unter folgender Bedingung verlängern, daß das Rechteck aus dieser Linie nebst dem verlängerten Stücke (das heißt aus* CL) *und diesem verlängerten Stücke* DL *dem Viereck auf der andern Linie* AB *gleich seye.*

Clavius zu *Eukl.* 3, 36. S. 312.

*) Der Beweis Steenstra'es ist nicht so weitläuftig, als der des Herrn Verfassers.

Auflösung. Ziehe nach der 4ten und 1sten Aufgabe CG; verfahre sodann nach der 7ten Aufgabe, und 3ten Annahme; *) mache endlich vermittelst der 2ten Aufgabe DL=GI.

Beweis. Vermöge des 2ten Corollariums vom 13ten Lehrsatze des 5ten Buchs.

14te Aufgabe. 15te Fig.

Es sey eine gerade Linie ML *gegeben, man soll eine andere gegebene Linie,* AB, *welche aber nicht kleiner als das Doppelte von jener* ML *sey, auf die Art schneiden, daß jene erstere Linie zwischen den Theilen* (AF, FB) *dieser zwoten in mittlerer Verhältniß-Gleichheit liege.*

Auflößung. Vermittelst der 7ten Aufgabe der 3ten Annahme der 4ten und 6ten Aufgabe.

Clavius beym 13ten Lehrsatze des 6ten Buchs von Eukl. 565ste S.

Beweis. Vermöge des 3ten Corollariums vom 12ten Lehrsatz des 5ten Buchs.

3te Abtheilung.

Ueber die Proportional-Linien.

15te Aufgabe. 16te Fig.

Eine Linie AE *zu finden, welche zu zwoen gegebenen Linien* AB *und* AC *die dritte Proportional-Linie sey.* Eukl.

*) Ich möchte hier hinzufügen: ziehe hierauf GE und verlängere diese GE; etc.

Eukl. 6. 11. — St. 257ste S. 9ter Satz — W. g. §. 186. *).

Auflösung. Vermittelst der 2ten Annahme, der 2ten und 6ten Aufgabe.

Beweis. Nach dem 1sten und 2ten Lehrsatz des 4ten Buchs.

16te *Aufgabe.* 17te *Fig.*

Eine Linie DH *zu finden, welche zu dreyen gegebenen Linien* A, B, C, *die vierte Proportional-Linie sey.*

Eukl. 6. 12. — W. g. §. 187. *) — St. 258ste S. 10ter S.

Auflösung. Vermittelst der 2ten Annahme, der 2ten und 6ten Aufgabe.

Beweis. Nach dem 1sten und 2ten Lehrsatze des 4ten Buchs.

17te *Aufgabe.* 18te *Fig.*

Es seyen drey Linien A, B, C *gegeben, man soll eine vierte* GH *finden, welche sich zu der dritten* C *verhalte, wie sich die erste* A *zu der zwoten* B *verhält.*

Clavius zu *Eukl.* 6. 12.

*) In der angef. Ausg. §. 272. Cor. 1. Probl. 22.

*) — — — — §. 271. Probl. 22.

Auflösung. Vermittelst der 1sten Annahme, der 2ten und 6ten Aufgabe.

Beweis. Nach dem 1sten und 2ten Lehrsatz des 4ten Buchs.

18te *Aufgabe.* 19te *Fig.*

Zwischen zwoen gegebenen Linien A *und* B *eine mittlere Proportional-Linie zu finden.*

Eukl. 6, 13. — W. g. §. 210. *). — St. 258ste S. 11ter S.

Auflösung. Vermittelst der 1sten Annahme, der 2ten und 7ten Aufgabe, der 3ten Annahme, und der 3ten Aufgabe.

Beweis. Vermöge des 3ten Corollariums vom 12ten Lehrsatz des 5ten Buchs.

19te *Aufgabe.* 20ste *Fig.*

Es sey die mittlere Linie A *und die Summe* AC *der äussern von dreyen Proportional-Linien gegeben, man soll diese äussern Linien selbst* (AF *und* CF) *finden.*

Tacquet Cor. 2. bey *Eukl.* 6, 13.

Auflösung. Vermittelst der 7ten Aufgabe, der 3ten Annahme, der 4ten, der 2ten, der 6ten Aufgabe, zweymal genommen.

Be-

*) In der angef. Ausg. §. 327. Probl. 35.

Beweis. Vermöge des 3ten Corollariums vom 12ten Lehrsatz des 5ten Buchs.

20ste Aufgabe.

Zwischen zwoen gegebenen Linien A *und B, drey, oder sieben, oder funfzehn, kurz, so viele mittlere Proportional-Linien zu finden, als man vermittelst der fortgesetzten Zusammenzählung von den Gliedern der geometrischen Progression* 1, 2, 4, 8, 16, 32, *u. s. w. herausbringen kann.*

Tacquet Cor. 3. bey *Eukl.* 6, 13. *).

Auflösung. Vermittelst der 18ten Aufgabe.

1ste Anmerkung. Der Grund, warum man nur 3, 7, 15. u. s. w., das heisst, jedesmahl der Zahl nach ungerade mittlere Proportional-Linien finden kann, besteht hierin. Man kann geometrisch zwischen zwoen Linien nur *eine* Proportional-Linie finden. Sind also zwo Linien A und B gegeben; so findet man vermittelst der 18ten Aufgabe eine dritte, zwischen beyden mittlere Proportional-Linie (C). Man kann nun wiederum zwischen der ersten Linie A und der ersten mittlern Proportional-Linie C eine mittlere Proportional-Linie (D) und zwischen der Linie C und der gegebenen zwoten Linie B ebenfalls eine andere mittlere Proportional-Linie (E); folglich im Ganzen 3. mittlere Proportional-Linien finden. Zwi-

*) In der Ausgabe Tacquets, die ich oben anzeigte, 6, 13. Scholium.

Zwischen diesen fünf Linien kann man nun aufs neue 4 Proportional-Linien, namentlich zwischen A und D, D und C, C und E, E und B, das heisst im Ganzen 7, u. s. w. Proportional-Linien finden.

8te *Anmerkung*. Die Alten haben bereits viele Mühe angewandt, um die Aufgabe: wie man zwischen zwoen gegebenen Linien zwo mittlere Proportional-Linien finden könne? aufzulösen. Allein die Auflösung dieser Frage ist vermittelst der blossen Messkunde, insofern man nehmlich diese Wissenschaft in dem engsten Sinne des Worts, welchen die Alten ihm gaben, nimmt, das heisst, vermittelst des Kreisses und der geraden Linie allein, unmöglich. Ich habe in der 4ten und 5ten Anmerkung zu dem 12ten Lehrsatz im 4ten Buch die Gründe angegeben, worauf einige Arten von Auflösungen beruhen, und angezeigt, was man sollte thun können, damit sie *geometrisch* würden. Allein hierzu fehlt es uns an Kräften. Man kann die Wahrheiten, welche man dabey zum Grunde legt, blos *versuchsweise* anwenden. Wie wenn man zum Beyspiel (156ste Fig.) die beyden gegebenen Linien BD und DF senkrecht auf einander errichtet, eine derselben nach A, die andere nach C verlängert, und zween Winkelhaken FAI und BCI nimmt, deren einen FAI man so ansetzt, dass das Bein AF immer A berühre, und der Winkel jedesmahl auf die Linie BA falle, und man den andern BCI auf das Bein AI des erstern Winkelhakens auf solche Art schiebt, dass CB

immer

immer auf den Punkt B, und der Winkel an die Linie FC zu liegen komme; so werden AD und DC die zwo mittlere Proportional-Linien seyn. Dies ist die Verfahrungsart des *Plato*. Man sehe über dieselbe und die von *Cartesius Tacquet* bey *Eukl.* 6. 13. nach.

Ich habe auch in dem 6ten und 7ten Corollarium des 13ten Lehrsatzes vom 5ten Buch die Gründe, die genannte Aufgabe vermittelst eines Kreises zu finden, angewiesen. Siehe ebenfalls *Tacquet* am angeführten Platze nach.

21*ste Aufgabe*. 21*ste Fig*.

Die Verhältniß, welche zwischen zwoen gegebenen Linien AB, BC, *Statt findet, deren erstere aber größer, als die letztere ist, nach Belieben zu verlängern und die Summe aller Glieder anzugeben.*

Tacquet bey *Eukl.* 6, 11.

Auflösung. Man richtet nach der 4ten Aufgabe AD ⊥ auf AB, und nach der 3ten Aufgabe BE ⊥ auf AB. Man mache nach der 2ten Aufgabe AD = AB, BE = BC. Man ziehe DE bis nach AF verlängert. Man ziehe CG ⊥ auf AF; mache CN = CG; ziehe HN ⊥ auf AF u. s. w. AB, BC, CN u. s. w. sind die Glieder, und AF die Summe von ihnen allen.

Beweis. Vermöge des 2ten Lehrsatzes im 4ten Buch, und der Eigenschaften der Verhältniß-Gleichhei-

heiten, besonders vermöge des 8ten Lehrsatzes im 3ten Buch.

Anmerk. Obschon man die Anzahl der Glieder so grofs annehmen kann, als man will; so ist doch ihre Summe eine bestimmte Linie AF, weil die Glieder in einer bestimmten Verhältniſs (von AB : BC) abnehmen. S. 3, 14. 6.

22ste Aufgabe. 149*ste Fig.*

Eine Linie AD *nach harmonischer Verhältniſs-Gleichheit, das heiſst, vermöge der 1sten Anmerkung zu der 22sten Erklärung des 3ten Buchs, die Linie* AD *dergestalt in drey Theile* AB, BC, CD, *zu theilen, daſs die ganze Linie* AD *sich zu einer der äussern Linien z. B.* AB, *wie die andere Linie* CD *zu dem mittlern Theil* BC *verhalte.*

La Hire Section. Con. prop. 1.

Auflösung. Ziehe DG und AG nach Belieben. Ziehe nach der 6ten Aufgabe aus dem Punkte B auf die Linie AD nach Belieben BE mit DG parallel. Verlängere EB nach F, bis dafs BF = EB (nach der 2ten Aufgabe.) Ziehe FG.

Beweis. △ADG ∾ △ABE, und △DGC ∾ △BFC;
folglich ist nach 4, 2. AD:AB = DG:BF oder BE;
nun ist DG:BF = DC:BC;
folglich AD:AB = DC:BC (3, 11.)

Zwey-

Zweytes Buch.

Ueber die Winkel.

1ste Aufgabe. 22ste Fig.

E*inen gegebenen Winkel* ACB *in zween gleiche Theile* (ACF, BCF) *zu theilen.*

Eukl. 1, 9. — St. 25ste S. 7ter S. — W. g. §. 126, *)

Auflösung. Man verfahre aus C vermittelst der 3ten Annahme, und sodann aus den beeden Punkten D und D vermittelst eben dieser Annahme und des 6ten Grundsatzes im 1sten Buche. Man zieht CF, welche die verlangte Theilung macht.

Beweis.

*) S. in der angef. Ausg. §. 209. Prob. 14.

Beweis. Vermöge 1, 12. 3.

1ste Anmerk. Man kann auf diese Art vermittelst einer beständigen Theilung in zween gleiche Theile einen gegebenen Winkel in vier, acht, sechszehn u. s. w. gleiche Theile, kurz in eine Anzahl gleicher Theile theilen, die irgend eine Macht der Zahl 2 ist.

2te Anmerk. Man kann vermittelst der Messkunde allein, insofern man dieses Wort im engsten Verstande nimmt, das heisst, vermittelst eines Kreises und einer geraden Linie, keinen Winkel, den rechten Winkel allein ausgenommen, welchen man in drey, oder auch fünf Theile theilen kann, in eine ungerade Anzahl gleicher Theile theilen. Von diesem letztern Falle handelt die folgende 2te Aufgabe, und die 8te und 9te im 4ten Buch.

3te Anmerk. Es war eine berühmte Aufgabe bey den Alten: wie man einen Winkel vermittelst der Messkunde allein, in drey Theile theilen solle? Ich habe bereits im 8ten Corollarium des 11ten Lehrsatzes vom 1sten Buch *), und dem 8ten Corollarium des 8ten Lehrsatzes im 8ten Buche zu erkennen gegeben, dass diese Aufgabe darauf hinausläuft, dass, wenn man einen gegebenen Winkel DCE hat (165ste *Fig.*) eine Schnittlinie DGA dergestalt zu ziehen ist, dass das Stück AG ausserhalb des Kreises dem Halb-

*) Vergl. auch 2, 10. 4.

Halbmesser gleich sey. Dieser Forderung kann man geometrisch, nehmlich im engsten Sinne dieses Worts, keine Genüge thun.

2te Aufgabe. 23ste Fig.

Einen rechten Winkel BCA *in drey gleiche Theile zu theilen.*

Clavius bey dem 32sten Lehrsatze des 1sten Buchs von *Euklid.* 108te S.

Auflösung. Man verfahre aus C und A nach der 3ten Annahme und dem 6ten Grundsatze des 1sten Buchs; hierauf nach der 1sten Aufgabe von diesem Buche.

Beweis. Vermöge des 2ten Corollariums von I, 11.

3te Aufgabe. 24ste Fig.

Aus einem gegebenen Punkte A *einer gegebenen Linie* AB *eine Linie* AL *zu ziehen, welche mit dieser gegebenen Linie einen dem gegebenen Winkel* CDE *gleichen Winkel* LAB *mache.*

Eukl. I, 23. — St. 38ste S. 18ter S. — W. g. §. 69. *)

Auflösung. Man verfahre aus D nach der 3ten Annahme; sodann aus A und F nach eben dieser Annahme und dem 6ten Grundsatze des 1 Buchs; *An-*

*) §. 208. Probl. 13. der angef. Ausg.

Anmerkung. Diese Auflösung ist ganz die der 1sten Aufgabe im 3ten Buche.

4te Aufgabe. 25ste Fig.

Aus einem gegebenen Punkte F *ausserhalb einer Linie* (AB) *eine Linie* FA *zu ziehen, welche mit der gegebenen Linie* AB *einen einem gegebenen Winkel gleichen Winkel* FAB *mache.*

Auflösung. Man verfahre aus irgend einem Punkte D in der Linie nach der 3ten Aufgabe, und sodann aus F nach der 6ten Aufgabe des 1sten Buchs.

Beweis. Vermöge der 8ten Erklärung im 1sten Buche.

Drit-

Drittes Buch.

Ueber die geradlinichte Figuren.

1ste Abtheilung.

Ueber die Beschreibung der Figuren.

1ste Aufgabe. 26ste Fig.

Aus dreyen gegebenen Linien A, B, C, *deren zwo zusammen genommen immer größer, als die dritte sind, ein Dreyeck* EHF *zu machen.*

Eukl. 1, 22. — St. 38ste S. 17ter S. — W. g. §. 76. *)

Auflößung. Vermittelst der 2ten Annahme, der 1sten Aufgabe im 1sten Buch, der 3ten Annahme und des 6ten Grundsatzes im 1sten Buche.

*) Ebendaselbst §. 205. probl. 12.

Anmerkung. Der Grund, aus welchem die Bedingungs-Worte: „*deren zwo*" etc. beygefügt werden müssen, ergiebt sich aus 1, 15.

2te Aufgabe. 27ste Fig.

Auf eine gegebene Linie AB *ein gleichseitiges Dreyeck* ABC *zu beschreiben.*

Eukl. 1. 1. — St. 25ste S. des 6ten Satzes Cor. — W. g. §. 74. *)

Auflösung. Vermittelst der 3ten Annahme und des 6ten Grundsatzes im 1sten Buche.

3te Aufgabe. 28ste Fig.

Auf eine gegebene Linie AB *ein gleichschenklichtes Dreyeck* ABC *zu beschreiben.*

Clavius bey *Eukl.* 1, 1. — St. 25ste S. 6ter Satz. — W. g. §. 75. **)

Auflösung. Vermittelst der 3ten Annahme, und des 6ten Grundsatzes im 1sten Buch.

Anmerkung. Auf ähnliche Art, nur mit Kreissen von ungleichen Halbmessern, beschreibt man auf eine gerade Linie ein ungleichseitiges Dreyeck. S. *Clavius* am angeführten Orte.

4te

*) Eben daselbst. §. 198. Probl. 10.

**) — — §. 199. probl. 11.

4te Aufgabe. 29ste Fig.

Auf eine gegebene Linie AB *ein Quadrat* DABC *zu beschreiben.*

Eukl. I, 46. — St. 49ste S. 31ster S. — W. g. §. 138. *)

Auflößung. Für AD und BC vermittelst der 4ten und 2ten Aufgabe des 1sten Buchs. Man ziehe hierauf DC.

Beweis. Vermöge der 8ten Erklärung und des 18ten Lehrsatzes im 1sten Buch. — Oder nachdem man BD gezogen hat, vermöge der 8ten Erklärung des 4 und 8ten Lehrsatzes im 1sten Buche. **)

Anmerk. Man beobachtet das nehmliche Verfahren, wenn man auf die Linie AB kein Quadrat, sondern ein Rechteck beschreiben will. In diesem Falle macht man AD und BC nicht der AB, sondern der andern gegebenen Linie gleich. W. g. §. 139. ***)

5te Aufgabe. 30ste Fig.

Es sey die Summe AE *der zwo Seiten eines Rechtecks und seine Diagonale* AC *gegeben, man solle die Seiten* AB, BC *bestimmen.*

*) Eben daselbst §. 338. Probl. 34.

**) Vergl. I, 19 2te Anm.

***) Ebendaselbst §. 139. Probl. 35.

Auflösung. 1stens. Richte in C die Lothlinie CF = AC nach der 4ten und 2ten Aufgabe des 1sten Buchs auf.

2tens. Ziehe AF und theile sie in zween gleiche Theile in D nach der 7ten Aufgabe des 1sten Buchs.

3tens. Ziehe aus D als dem Mittelpunkt mit DA als dem Halbmesser den halben Kreis ACF, welcher folglich durch den Winkel C gehen wird (nach dem 5ten Lehrsatz des 5ten Buchs.)

4tens. Ziehe CD, welche folglich auf AD senkrecht steht (nach 1, 11. 4.)

5tens. Ziehe AG = AE (nach der 1sten Aufgabe des 1sten Buchs.)

6tens. Ziehe FG und theile sie in zween gleiche Theile in M, eben so AE in K (nach der 7ten Aufgabe des 1sten Buchs), so dass AK = KE.

7tens. Mache KL = MG = ½ FG.

8tens. Beschreibe auf AC den halben Kreis ABC.

9tens. Mache BA = AL = AK — KL.

10tens. Ziehe BC. Der < ABC ist alsdenn vermöge des 5ten Lehrsatzes im 5ten Buche ein rechter Winkel.

AB und BC sind die verlangte Seiten, das heisst, man muss beweisen, dass AB + BC = AE.

Beweis.

Beweis. □ auf AF = □ auf AG = □ auf FG (2, 7. 1.) = □ auf AF − □ auf AE. Ebenfalls ist □ auf AF = □ auf AC + □ auf FC = 2 □ auf AC (No. 1.); und □ auf FG = 4 □ auf LK (No. 7.; und 2, 2. 1.) = 4 □ auf (AK − AL) = 4 □ auf AK − 8. Recht. aus AK. AL + 4 □ auf AL (2, 2. 2.) = □ auf AE − 4 Recht. aus AE. AB + 4 □ auf AB (No. 7. und 9.) Setzt man nun diese Werthe in die Stelle der Grössen, welche man in der ersten Zeile hat; so ist 2 □ auf AC − □ auf AE = □ auf AE − 4 Recht. aus AE. AB + 4 □ auf AB; und folglich □ auf AC = □ auf AE − 2 Recht. aus AE, AB + 2 □ auf AB; und □ auf AC − □ auf AB = □ auf AE − 2 Recht. aus AE. AB + □ auf AB = □ auf (AE − AB) (vermöge 2, 2. 2); folglich nach 2, 7. 1. □ auf BC = □ auf (AE − AB), und BC = AE − AB; oder BC + AB = AE.

Anmerkung. Die Auflösung würde unmöglich seyn, wenn die Linie AC der AE gleich, oder grösser, als sie wäre; denn in diesem Falle würde die als Diagonale angenommene Linie AC der Summe der Seiten gleich, oder grösser als diese Summe seyn; welches nach 1, 25. unmöglich ist.

6te *Aufgabe.* 30ste *Fig.*

Man soll, wenn die Diagonale AC *eines Rechtecks und der Unterschied* AE *seiner Seiten gegeben sind, diese Seiten* AB, BC *selbst finden.*

Auflößung. Sie ist die der vorigen Aufgabe, ausgenommen, daſs der Punkt E zwiſchen A und C und nicht über C hinaus fällt.

7te Aufgabe. 31*ſte Fig.* *)

Der Unterſchied AB *zwiſchen der Diagonale und der Seite eines Quadrats iſt gegeben, man ſoll das Quadrat ſelbſt finden.*

Clavius bey dem 14ten Satze im 2ten Buche Euklids p. 213.

1ſte Art von Auflößung. 1ſtens vermittelſt der 4ten Aufgabe in dieſem Buche; 2tens vermittelſt der 1ſten Annahme und der 2ten Aufgabe des 1ſten Buchs, indem man ED=DA macht; und 3tens vermittelſt der 4ten Aufgabe in dieſem Buche.

2te Art von Auflößung. No. 1. bleibt; 2tens verlängere man BA; und 3tens verfahre man nach der 4ten Aufgabe des 1ſten Buchs in Rückſicht auf EF, BG, und FG.

Beweis für die erſte Art von Auflößung. Man ziehe EA, ſodann FA. Man hat zu beweiſsen 1ſtens, daſs FA und AB *eine* gerade Linie bilden, folglich daſs BF die Diagonale von □ FEBG ſeye; und 2tens, daſs FB—FE=AB, und folglich daſs FE=FA. Das 1ſte geſchicht, indem man den Werth der Winkel l, f, e, vermöge 1, 7. und 1, 11. und ſodann den der o, p nimmt, und daraus vermö-

*) Vergl. 1, 19. 2. 2te Anm.

vermöge 1, 2. zeigt, daſs $< p + < f + < DAB = 2 <$. Das 2te erhellet aus demjenigen, was in dem vorigen Theile des Beweiſes ſchon bewieſen worden iſt, daſs $< o = < p$, und aus 1, 11.

Beweis für die 2te Art von Auflöſsung. Man ziehe EA, und beweiſe 1ſtens aus dem Werth der Winkel l, e, f, o, und p, wie im erſten Beweiſe geſchehen iſt, daſs $< o = < p$ und folglich daſs $FE = FA$; 2tens aus dem Werth der Winkel FEB, EBF, daſs $< EFB = < EBI$, und folglich (1, 11.), daſs $FE = EB$; 3tens vermittelſt der Betrachtung der $\Delta\Delta$ FEB und FGB, (vermöge 1, 8.), wornach $BG = FE$, und folglich FEBG ein Quadrat iſt.

8te *Aufgabe.* 32ſte *Fig.*

Es ſeyen die Hypothenuſe A (*oder* CD) *und eine der den rechten Winkel einſchließenden Seiten* B *eines rechtwinklichten Dreyecks gegeben, man ſolle die andere Seite* DE *finden.*

Auflöſsung. Vermittelſt der 3ten Annahme, der 1ſten Aufgabe im 1ſten Buche, und der 1ſten Annahme.

Beweis. Vermöge 5, 5.

9te *Aufgabe.* 33ſte *Fig.*

Man ſolle ein gleichſchenklichtes Dreyeck FCD *beſchreiben, deſſen Grundlinie,* FD *größer als einer der Schenkel* CD, CF *ſeye.*

Auflößung. Vermittelst der 3ten Annahme.

Beweis. 5, 4. 6.

10te Aufgabe. (*34ste Fig.*)

Man beschreibe ein gleichschenklichtes Dreyeck CAB, *in welchem jeder der Winkel* ABC, ACB *auf der Grundlinie doppelt so groß, als der Scheitel-Winkel* A *sey.*

Eukl. 4, 10. — St. 88ste S, 13ter S.

1ste Art von Auflößung. 34ste Fig. 1stens ziehe man nach Belieben eine Linie AB, welche man nach der 12ten Aufgabe des 1sten Buchs theile; 2tens beschreibe man aus A mit AB einen Kreis; 3tens mache man BC=AD, und ziehe AC.

Construktion für den Beweis. Man setzte voraus, es gehe durch A, D, C, ein Kreis (vermöge 5, 2.)

Beweis. Mit No. 1; No. 3. und 5, 13. 2. beweisst man 1stens dass BC eine Berührungs-Linie des kleinen Kreises, und folglich nach 5; 9. <DCB=<c sey; 2tens mit 1, 7. und 1, 11, dass <BDC=BCA=<B, und folglich DC=BC=DA; und daher 3tens <c=<d, und folglich (1, 7.) <BDC=<B=2<c.

1ste Anmerkung. Diese Art von Auflösung hat *Euklid* gegeben. Sie hängt daher von den Eigenschaften des Kreises ab. Die folgende

de 2te Art von Auflösung ist leichter, da sie allein die Lehre der Dreyecke voraussetzt.

2te Art von Auflößung. 141ste *Fig.* 1stens ziehe man nach Belieben eine Linie AB, und schneide sie nach der 12ten Aufgabe des 1sten Buchs; 2tens ziehe man aus C und B mit einem der AC gleichen Halbmesser Kreisbögen, welche einander in D schneiden, und ziehe BD. Das △ ABD ist das verlangte Dreyeck.

Beweis. 2, 10. 1stes und 2tes Corollarium.

2te Anmerkung. Sollte man ein solches in der Aufgabe bestimmtes Dreyeck auf eine gegebene Linie zu beschreiben haben; so müsste man zuerst ein solches Dreyeck nach Belieben machen, und sodann nach der Vorschrift, welche ich im 29sten Lehrstücke mittheilen werde, ein diesem ähnliches Dreyeck auf die gegebene Linie beschreiben.

2te Abtheilung.

Ueber die Beschreibung der Figuren in Rücksicht ihres Inhalts.

11te *Aufgabe.* 35ste *Fig.*

Man solle ein Parallelogramm FHCG *beschreiben, welches einem gegebenen Dreyecke* ABC *gleich sey,*

ſeye, und einen einem gegebenen Winkel D *gleichen Winkel* EHC *habe.* *).

Eukl. 1, 42. — St, 47ſte S. 29ſter S.

Auflöſung. Vermittelſt der 6ten Aufgabe des 1ſten, der 3ten des 2ten, der 7ten des 1ſten und der 6ten des 1ſten Buchs, zweymahl genommen.

Beweis. 1, 19. 1., und 2, 1. 6.

12*te Aufgabe.* 36*ſte Fig.*

Ein Dreyeck ADE *zu beſchreiben, welches einem gegebenen Parallelogramme* BCFA *gleich ſeye, und einen einem gegebenen Winkel gleichen Winkel* DAE *habe.*

Clavius bey dem 42ſten Satze des 1ſten Buchs von *Euklid.*

Auflöſung. Vermittelſt der 3ten Aufgabe des 2ten Buchs, und der 1ſten und 6ten Aufgabe im 1ſten Buche.

Beweis. 2, 1. 6.

13*te Aufgabe.*

Auf eine gegebene Linie HI *ein Parallelogramm* IHMK, *oder* IHBK *zu beſchreiben, welches einem gegebenen Dreyecke* ACB *gleich ſeye, und einen einem*

*) Vergl. 2, 16. 3te Anmerkung.

einem gegebenen Winkel A *gleichen Winkel* IKM *habe.*

Eukl. 1, 44.

1ste Art von Auflößung. 37ste Fig. 1stens mache man nach der 11ten Aufgabe ▭ DAFE; 2tens verlängere man IH, bis dass $HG = AF$; 3tens mache man vermöge der 3ten Aufgabe des 2ten Buchs $< HGN = < A$; 4tens mache man $GL = HG$, und $LN = AD$, und vollende die Parallelogramme auf allen gezogenen Linien.

Beweis. 1, 19. 4.

2te *Art von Auflösung.* 38ste Fig. 1stens verfahre ganz wie bey der 1sten Auflösung No. 1. Der 2te Theil dieser Auflösung beruht auf 4, 7. 4., und wird also nach der 17ten Aufgabe des 1sten Buchs ausgeführt.

Beweis. 4, 7. 4.

Anmerkung. Es ergiebt sich, dass es eben so leicht sey, auf eine gegebene Line ein Parallelogramm zu beschreiben, welches einem gegebenen Parallelogramm gleich seye, und einen einem gegebenen Winkel gleichen Winkel habe.

14*te Aufgabe.*

Man solle auf eine gegebene Linie HI *ein Dreyeck* HIL *beschreiben, welches einem gegebenen Parallelo-*

lelogramm GB *gleich seye, und einen einem gegebenen Winkel gleichen Winkel habe.*

Clavius bey *Euklid's* 1, 44.

1ste Art von Auflößung. (39ste *Fig.*) Vermittelst der 12ten und 13ten Aufgabe (nehmlich dieser ihrer 1sten Art von Auflösung) in diesem Buche.

Beweis. 1, 19. 1.

2te Art von Auflößung. (40ste Fig.) Vermittelst der 12ten und 13ten Aufgabe (dieser ihrer 2ten Auflösung) in diesem Buche.

Beweis. 4, 7. 4., und 1, 19. 1.

15te Aufgabe.

Auf einer gegebenen Linie HG *das Quadrat* DB *einer gegebenen Linie* AB *aufzurichten, oder, was auf dasselbe hinausläuft, auf eine gegebene Linie* HG *ein Rechteck* EFGH *zu beschreiben, welches einem gegebenen Quadrate* AC *gleich seye.*

Tacquet bey *Euklid's* 6, 16. 1. und 17. 2.

1ste Art von Auflößung. (41ste Fig.) Vermittelst der Anmerkung zu der 13ten Aufgabe in diesem Buche.

Beweis. 4, 7. 4.

2te Art von Auflößung. Vermittelst der 15ten Aufgabe in diesem Buche.

Be-

Beweis. 4, 7. 8. No. 3. und 8.

3te Art von Auflößung. (45ste Fig.) Richte auf die gegebene Linie FG die Lothlinie GL auf, welche der Seite des gegebenen Quadrats gleich seye. Ziehe FL. Richte auf FL in L eine Lothlinie LH auf. Verlängere FG bis nach H, und verlängere LG, bis daſs GI=GH. KG wird das Rechteck seyn.

Beweis. 4, 12. 3. und 4, 7. 8. No. 3. und 8.

16te Aufgabe. 42*ste Fig.*

Ein Parallelogramm IO *zu beschreiben, welches einer gegebenen geradlinichten Figur* (ABCDEF) *gleich seye, und einen einem gegebenen Winkel gleichen Winkel* KIP *habe.*

Eukl. 1, 45.

Auflößung. Man ziehe aus irgend einem Punkte F die Linien FD, FC, FB; und sodann vermittelst der 11ten, und hierauf, so oft es nöthig ist, der 13ten Aufgabe in diesem Buche. *).

17te Aufgabe. 43*ste Fig.*

Ein Dreyeck LHI *zu beschreiben, welches einer gegebenen geradlinichten Figur* E *gleich seye, und einen einem gegebenen Winkel gleichen Winkel habe.*

Auf-

*) S. 2, 20.

Auflößung. Vermittelst der 16ten und 12ten Aufgabe dieses Buchs.

18te *Aufgabe.* 44ste *Fig.*

Auf einer gegebenen Linie KL *ein Parallelogramm oder ein Dreyeck* KNL *zu beschreiben, welches einer gegebenen Figur gleich seye, und wenn man will, ebenfalls einen einem gegebenen Winkel gleichen Winkel habe.*

Clavius bey *Eukl.* 1, 45.

Auflößung. Man mache zuerst nach der 16ten Aufgabe dieses Buchs das Parallelogramm FH; sodann beschreibe man nach der 14ten Aufgabe ebenfalls dieses Buchs auf KL das △KNL. *).

19te *Aufgabe.* 45ste *Fig.*

Man beschreibe ein Quadrat, welches einem gegebenen Rechtecke KG *oder einer geradlinichten Figur gleich sey.*

Eukl. 2, 14.

Auflösung. Mit Hülfe der 18ten Aufgabe dieses, und der 18ten des 1sten Buches, und sodann auf GL vermittelst der 4ten Aufgabe dieses Buchs.

Beweis. §. 12. 3. und 4, 7. 8. No. 3.

20ste

*) S. ebenfalls den Beweis von 2, 20.

20ste *Aufgabe.* 46ste *Fig.*

Ein Trapezium, wovon zwo Seiten mit einander parallel seyn, in so viele gleiche Theile zu theilen als man verlangen möchte.

1ste Art von Auflösung. 46ste Fig. ABCD sey das Trapezium, wovon die Seiten AB, DC mit einander parallel seyn. Man mache BI = IC; ziehe AIE, und verfahre in Rücksicht auf die Linie DE nach der 8ten Aufgabe des 1sten Buchs.

Beweis. Man beweise zuerst nach 1, 9., dass △ ADE = *Trapez.* ABCD. Das Uebrige ergiebt sich aus 4, 6.

2te Art *von Auflösung.* 9te Fig. Es sey ABHP das Trapezium, wovon die Seiten AB, PH mit einander parallel liegen. Man verlängere PA, HB, bis dass sie in C zusammentreffen, und schneide (PH) nach der 8ten Aufgabe des 1sten Buchs. Alle die Trapezien AVIP, VUDI u. s. w. sind einander gleich.

Beweis. 4, 6. *)

Corollarium.

Eben diese Arten von Auflösungen gelten für das Parallelogramm, das Quadrat, das Rechteck.

W. g.

*) vergl.

W. g. §. 209. *)

Anmerkung. Die 2te Art der Auflösung ist der 1sten Art weit vorzuziehen.

21ste Aufgabe. 180*ste Fig.*

Ein Trapezium ABCD *in zween gleiche Theile* AFKD, BFKC *zu theilen.*

Auflösung. Theile AB vermittelst der 7ten Aufgabe des 1sten Buchs in zween gleiche Theile in F. Ziehe vermittelst der 5ten Aufgabe des 1sten Buchs die Lothlinien AE, BI. Theile die Linie DC in K, so dass DK:KC=BI:AE, vermittelst der 11ten Aufgabe des 1sten Buchs. Ziehe FK. Die Theile AFKD, BFKC werden gleich seyn.

Construktion für den Beweis. Ziehe AK, BK.

Beweis. 2, 6. und 4, 7. 3.

3te Abtheilung.

Ueber die Verhältnisse, die Summe, und den Unterschied verschiedener geradlinichter Figuren.

22ste Aufgabe. 48*ste Fig.*

Die Verhältniss zwoer geradlinichter Figuren A *und* B *vermittelst gerader Linien* HG, GF *auszudrücken.*

Auf-

*) In der lat. Quart-Ausgabe vom J. 1730. §§. 440. 441. Probll. 64. 65.

Auflösung. 16te und 18te Aufgabe dieses Buchs.

Beweis. 4, 6. *)

23ste Aufgabe. 48ste Fig.

Man soll die Summe oder den Unterschied zwoer gegebener geradlinichter Figuren A und B finden.

Clavius bey Eukl. 1, 45. **)

Auflösung. Vermittelst der 16ten und 18ten Aufgabe in diesem Buche.

Beweis. 2, 1. 3.

24ste Aufgabe. 48ste Fig.

Man soll die Summe von so viel geradlinichten Figuren finden, als man deren angenommen hat.

Clavius bey Euklid. 1. 45.

Auflösung. Vermittelst der 16ten und 18ten Aufgabe in diesem Buche.

Beweis. 2, 1. 3.

25ste Aufgabe. 49ste Fig.

Man soll ein Quadrat beschreiben, welches der Summe so vieler Quadrate, als man deren angenommen hat, gleich sey.

*) V. die Anmerkung zum 1sten Cor. von 4. 7.

**) Vergl. 2, 1. 6. 4.

Clavius bey *Eukl.* I. 47. 154ste S. No. 6. — W. g. §. 174.

Auflößung. Vermittelst der 4ten Aufgabe des 1sten Buchs.

Beweis. 2, 7.

26ste Aufgabe. 50ste Fig.

Man solle ein Quadrat beschreiben, welches den Unterschied der Quadrate ausdrücke, die man auf den Linien A *und* B *beschrieben habe.*

Clavius bey *Eukl.* I. 47. 153ste S.

Auflösung. Vermittelst der 7ten Aufgabe im 1sten Buche, der 3ten Annahme, und der 1sten Aufgabe des 1sten Buch.

Beweis. Nach dem 5ten Lehrsatze des 5ten Buchs, und des 7ten Lehrsatzes 1stem Corollarium im 2ten Buche.

Corollarium.

Begehrt man den Unterschied zwischen dreyen oder mehreren Quadraten; so wird man auf der Linie FD *die nehmliche Bewerkstelligungen machen, die man auf* CD *getroffen hat.*

27ste Aufgabe. 51ste Fig.

Es seyen auf den zwo Linien A *und* B *zwey Quadrate gegeben. Man solle zwey andere Quadrate finden,*

den, welche zusammengenommen der Summe der zwey gegebenen Quadrate gleich seyen, die neuen Quadrate mögen als einander gleich oder ungleich angenommen werden.

Clavius bey *Eukl.* 1, 47. 153ste S. No. 4.

1ste Art von Auflösung. Vermittelst der 4ten Aufgabe im 1sten Buche, der 1sten Annahme, der 7ten Aufgabe im 1sten Buch, der 3ten Annahme, der 3ten Aufgabe im 1sten Buche, und der 1sten Annahme.

Beweis. 2, 7. 5, 5. und 1, 8.

2te Art von Auflösung. Verlangt man ungleiche Quadrate, so kann man ganz allein nach der 1sten Annahme, der 4ten und 7ten Aufgabe im 1sten Buche, und der 3ten Annahme zu Werke gehen. In diesem Falle ist aber diese Aufgabe so vieler Auflösungen fähig, als man deren wünschen mag, da man in dem halben Kreise so viele Dreyecke beschreiben kann, als man will, und die auf den Seiten dieser Dreyecke beschriebenen Quadrate der Aufgabe entsprechen werden.

Beweis. 2, 7. *)

28*ste* (m) *Aufgabe.* 52*ste Fig.*

Es seyen zwey Quadrate EG *und* AC *gegeben. Man solle an das kleinste von ihnen eine Figur fügen,* *wel-*

*) 5, 5.

welche dem größten Quadrate gleich sey und dergestalt, daß die ganze Figur abermals ein Quadrat bilde.

Clavius bey *Eukl.* 1, 47. 154ste S. No. 7.

Auflösung. Vermittelst der 1sten Aufgabe des 1sten Buchs, der 1sten Annahme der 1sten Aufgabe des 1sten und der 4ten des 3ten Buchs.

Beweis. 2, 7.

28*ste* (n) *Aufgabe.* 53*ste Fig.*

Es sey eine Figur von mehr als dreyen Seiten gegeben. Man solle sie in eine gleich große Figur verändern, welche jedoch eine Seite weniger habe.

H. g. §. 182.

Auflösung. Vermittelst der 1sten Annahme, der 6ten Aufgabe des 1sten Buchs, und der 1sten Annahme.

Beweis. 2, 1.

4te Abtheilung.

Ueber die ähnlichen Figuren.

29*ste Aufgabe.* 54*ste Fig.*

Auf einer gegebenen Linie CD eine geradlinichte Figur zu beschreiben, welche einer gegebenen geradlinichten Figur ähnlich sey.

Eukl.

Eukl. 6, 18. — St. 262ste und 263ste SS. 15ter S.

Auflößung. Vermittelst der 1sten Annahme, und der 3ten Aufgabe des 2ten Buchs.

Beweis. Vermöge 4, 14.

30ste Aufgabe. 55ste Fig.

Man solle eine Figur N *beschreiben, die einer gegebenen Figur* L *ähnlich, und einer andern* M *gleich sey.*

Eukl. 6, 25.

Auflößung. In Rücksicht auf AH und AD vermittelst der 18ten Aufgabe dieses Buchs. Hierauf in Rücksicht auf FC vermittelst der 18ten Aufgabe des 1sten Buchs, und sodann in Rücksicht auf N vermittelst der 29sten Aufgabe dieses Buchs.

Beweis. Vermöge 4, 7., 4, 15. 1., und 3, 10. und 9.

31ste Aufgabe.

Es seyen die gleichliegende Seiten a, b *zwoer ähnlicher Figuren gegeben. Man solle die Verhältniß dieser Figuren vermittelst gerader Linien ausdrücken.*

Auflößung. 1, 15.

Beweis. 4, 15. 4, 7. 5., und 3, *4ter Grundsatz.*

32ste Aufgabe.

Es seye die Verhältniß zwoer ähnlichen Figuren (A, B) *vermittelst zwoer Linien* (M, N) *ausgedrückt. Man solle die Verhältniß ihrer gleichliegenden Seiten* (a, b) *finden.*

Auflößung. 1, 18.

Beweis. 4, 15., 3, 14, und 3, 10, 1.

33ste Aufgabe.

Man solle ein Vieleck N *beschreiben, welches einem andern Vielecke* M, *wovon eine Seite* (A) *bekannt ist, ähnlich, und zugleich ein bestimmtes Vielfacheck* m *desselben seye.*

Auflößung. 1ste Annahme, 18te Aufgabe des 1sten Buchs, und sodann auf dieser mittleren Proportional-Linie vermittelst der 29sten Aufgabe dieses Buchs.

Beweis. 4, 15.; 4, 7. 5., und 3, 14.

34ste Aufgabe.

Man solle ein Vieleck N *beschreiben, welches einem Vielecke* M, *dessen eine Seite* (A) *bekannt ist, ähnlich, und zugleich ein bestimmter Theil* $\frac{1}{m}$ *desselben seye.*

Auf-

Auflößung. Vermittelst der 8ten Aufgabe des 1sten Buchs, sodann der 18ten, und endlich auf dieser mittlern Proportional-Linie vermittelst der 29sten Aufgabe dieses Buchs.

Beweis, 4, 15; 4, 7. 5.; und 3, 14.

Corollarium.

Da alle Quadrate ähnliche Figuren oder Vielecke sind (das Corollarium aus der 3ten Erklärung des 2ten Buchs, und der 17te Lehrsatz des 4ten Buchs); so gilt diese Aufgabe auch in Rücksicht auf die Quadrate, und ist ihre Auflößung auch die Auflößung der folgenden Aufgabe (47ste Fig.):

„*Man solle ein Quadrat beschreiben, welches ein* „*bestimmter Theil eines gegebenen Quadrats* ABCD „*seye.*“

Allein man kann diese Aufgabe auch vermittelst der 20sten, 11ten und 19ten Aufgabe dieses Buchs auflößen, wenn man sich der 1sten Auflößung von der 20sten Aufgabe bedient hat. Oder man kann sie auch vermittelst der 2ten Auflößung der 20sten Aufgabe und der 19ten Aufgabe auflößen.

35*ste Aufgabe.* 56*ste Fig.*

Man solle eine Figur M *beschreiben, welche der Summe so vieler ähnlicher Figuren* A, B, C, D, *u. s. w., als man will, deren gleich liegende Seiten*, a,

b, c, d, *u. s. w. bekannt sind, gleich, und welche zugleich allen ähnlich sey.*

Auflößung. 4te und 1ste Aufgabe des 1sten, und 29ste Aufgabe dieses Buchs.

Beweis. 4, 20.

Vier-

Viertes Buch.

Ueber den Kreis.

1ste Abtheilung.

Ueber den Mittelpunkt des Kreises, und die Linien, welche man an den Kreis ziehet.

1ste Aufgabe.

Den Mittelpunkt C *eines gegebenen Kreises zu bestimmen.*

Eukl. 3. 1. — St. 92ste S. 2ter S.

1ste Art von Auflösung. 56ste Figur 1ste Annahme, 7te, und 3te, und abermahls 7te Aufgabe des 1sten Buchs.

Beweis. 5, 6.

2te

*) 5, 6. Cor.

2te *Art von Auflösung.* 57ste Fig. 1ste Annahme, 4te Aufgabe des 1sten Buchs, 1ste Annahme, 7te Aufgabe des 1sten Buchs.

Beweis. 5, 5.

2te Aufgabe. 58ste Fig.

Es sey ein Bogen ADE, *oder ein Abschnitt* ADEA *gegeben. Man solle seinen Mittelpunkt finden, und den ganzen Kreis vollenden.*

Eukl. 3, 25. — *St.* 92ste S. 2ter S.

Auflößung. 1ste Annahme, 7te und 3te Aufgabe des 1sten Buchs *)

Beweis. 5, 6. Cor.

3te Aufgabe. 59ste Fig.

Man solle in dem Kreise ABC *eine Linie* AB *ziehen, welche einer gegebenen Linie* N *gleich, jedoch kleiner, als die Mittellinie, sey.*

Eukl. 4, 1.

Auflößung. 1ste Aufgabe des 1sten Buchs, und 3te Annahme.

Beweis. 5, 11. 1.

An-

*) Und abermahls die 7te Aufgabe des 1sten Buchs.

Anmerkung. Es ergiebt sich, dass man immer zwo solche gleiche Linien in dem Kreise ziehen kann.

4te *Aufgabe.* 60ste *Fig.*

In dem Kreise DKF *eine gerade Linie* IK *zu ziehen, welche einer gegebenen Linie* AB *gleich, jedoch kleiner, als die Mittellinie, und zugleich mit einer andern gegebenen Linie* C *parallel sey.*

Clavius bey *Euklid* 4, 1.

Auflösung. 5te Aufgabe, die 7te zweymahlen, die 3te ebenfalls zweymahlen, alle aus dem 1sten Buche, und die 3te Annahme.

Beweis. 5, 11. 1.

2te Abtheilung.

Ueber die Kreisabschnitte und Kreisbogen.

5te *Aufgabe.* 61ste *Fig.*

Auf einer gegebenen Linie AB *ein Kreisstück zu beschreiben, welches einen gegebenen Winkel* N *enthalten könne.*

Eukl. 3, 33. — St. 115te S. 21ster S.

Auflößung. 3te Aufgabe des 2ten Buchs, 4te, 7te, 4te des 1sten Buchs, 3te Annahme. Der Kreisabschnitt AOB ist der gesuchte.

Beweis. 5, 9.

6te Aufgabe. 62ste Fig.

Von einem gegebenen Kreise ABC *ein Stück* BCA *abzuschneiden, welches einen gegebenen Winkel* N *enthalten könne.*

Eukl. 3, 34. — St. 115te S. 22ster S.

1ste Art von Auflößung. 1ste Annahme, 4te Aufgabe des 1sten und 3te Aufgabe des 2ten Buchs.

Beweis. 5, 7. und 9.

2te Art von Auflösung. 11te Aufgabe dieses, und 3te Aufgabe des 2ten Buchs.

Beweis. 5, 9.

7te Aufgabe. 63ste Fig.

Einen Kreisbogen ADB, *oder einen Kreisabschnitt in zween gleiche Theile zu theilen.*

Eukl. 3, 30. — St. 111te S. 17ter S.

Auflößung. 7te und 3te Aufgabe des 1sten Buchs.

Con-

Construktion für den Beweis. Ziehe AD, DB.

Beweis. 1, 8. und 5, 4. 5.

Anmerkung. Auf diese Art kann man einen Winkel in eine gerade Anzahl Theile, zum Beyspiel in 2, oder in eine Macht von 2 Theilen vermittelst einer beständigen Theilung in zween gleiche Theile theilen. Allein im genauesten *geometrischen* Sinne genommen, kann man keinen Bogen in drey oder eine ungerade Anzahl Theile theilen, diejenige Ausnahmen abgerechnet, von welchen im Verfolge die Rede seyn wird. Die Anmerkung, welche ich bey Gelegenheit der 1sten Aufgabe des 2ten Buchs geliefert habe, findet hier vollkommen Statt; denn es ist die nehmliche Aufgabe, daß man einen Bogen oder Winkel theilen solle, da der eine des andern Maaß ist.

8te *Aufgabe.* 64*ste Fig.*

Einen Bogen, welcher der vierte Theil des Umkreises ist, in drey gleiche Theile zu theilen.

Auflößung. 2te Aufgabe des 3ten, und 7te dieses, oder 1ste des 2ten Buchs.

Beweis. 1, 11. 2, und 5, 4. 3.

9te *Aufgabe.* 65*ste Fig.*

Einen Bogen, welcher der vierte Theil des Umkreises ist, in fünf gleiche Theile zu theilen.

Auf-

Auflößung. 1ete Aufgabe des 3ten, und 3te Aufgabe des 2ten Buchs.

Beweis. 1, 7.; 1, 11. und 5, 4. 3.

10te *Aufgabe.* 66*ste Fig.*

Einen Kreis zu beschreiben, welcher durch drey gegebene Punkte gehe. *).

Auflößung. 1ste Annahme, 7te und 3te Aufgabe des 1sten Buchs, und 1ste und 3te Annahme.

Beweis. 5, 6. **)

Anmerkung. Es ergiebt sich, daſs die Auflösung gerade die Construktion des 2ten Satzes im 5ten Buche ist.

3te Abtheilung.

Ueber die Berührungslinien des Kreises.

11te *Aufgabe.* 67*ste Fig.*

Aus einem im Umkreise gegebenen Punkte A *eine Berührungslinie* DAE *an den Kreis zu ziehen.*

Auf-

*) W. G. §. 294.

**) 5, 6. Cor.

Auflößung. 1ste Annahme, und 4te Aufgabe des 1sten Buchs.

Beweis. 5, 7.

12te *Aufgabe.*

Aus einem gegebenen Punkte ausserhalb des Kreises eine Berührungslinie an diesen Kreis zu ziehen.

Eukl. 3, 17. — St. 113te S. 19ter S.

1ste Art von Auflößung. 68ste Fig. 1ste Annahme, 7te Aufgabe des 1sten Buchs, 3te und 1ste Annahme.

Construktion. Ziehe CD, CB.

Beweis. 5, 5. und 7.

2te Art von Auflößung. 69ste Fig. 1ste und 3te Annahme, 3te Aufgabe des 1sten Buchs, und 1ste Annahme.

Beweis. 1, 8., und 5, 7.

Anmerkung. Es erhellet aus beyden Auflösungen, daſs man aus dem Punkte A immer zwo Berührungslinien, welche einander gleich seyn werden, wird ziehen können. Diese Wahrheit wird schon aus 5, 11. 4. bekannt seyn.

13te *Aufgabe.* 70ste *Fig.*

Es seye eine Berührungslinie KG *gegeben. Man solle den Berührungspunkt* E *bestimmen.*

Auflößung. 1ste Annahme, 7te Aufgabe des 1sten Buchs, und 1ste Annahme.

Construktion. Ziehe EH und HG.

Beweis. 5, 5, und 5, 7.

14te *Aufgabe.* 70*ste *Fig.*

Eine Linie EG *zu ziehen, welche den Kreis berühre, und mit einer Linie* AB, *die den Kreis schneide, parallel seye.*

Clavius bey *Euklids* 3, 17, 273ste S.

Auflößung. 5te und 4te Aufgabe des 1sten Buchs.

Beweis. 5, 7. und die 8te Erklärung des 1sten Buchs.

15te *Aufgabe.*

Es seyen zween Kreise gegeben, welche jedoch einander nicht ganz einschließen. Man solle eine Linie ziehen, welche sie gemeinschaftlich berühre.

Clavius bey *Euklids* 3, 17, 267ste S.

Es finden zween Fälle Statt; denn die Kreise sind einander der Grösse nach entweder gleich, oder ungleich.

1ster Fall. *71ste Fig.* a. b. c.

Auflößung. 1ste Annahme, 4te Aufgabe des 1sten Buchs, und 1ste Annahme.

Beweis. 8te Erklärung, 18ter Lehrsatz des 1sten, und 7ter des 6ten Buchs.

2ter Fall. *72ste Fig.* a. b. c.

Auflößung. 3te Annahme. Aus G mit einem Halbmesser = GC — EK. Weiter vermittelst der 11ten Aufgabe dieses, der 5ten und 4ten des 1sten Buchs, und der 1sten Annahme.

Beweis. 8te Erklärung und 18ter Lehrsatz des 1sten, und 7ter des 5ten Buchs.

16te Aufgabe. *73ste Fig.*

Einen Kreis zu beschreiben, welcher eine gegebene Linie AC *in einem gegebenen Punkte* B *berühre, und durch einen gegebenen Punkt* E *gehe.*

Auflößung. 3te Aufgabe des 1sten Buchs, 1ste Annahme, *) 3te Aufgabe des 1sten Buchs, und 3te Annahme.

*) Ich möchte noch vor dieser 3ten Aufgabe die 7te Aufgabe des 1sten Buchs vorausgehen lassen, und für 2. 20. im Beweise 5, 6. 2. setzen.

Beweis. 2, 10. und 5, 7.

17*te Aufgabe.* 74*ste Fig.* a. b. c.

Einen Kreis zu beschreiben, welcher durch einen gegebenen Punkt A gehe, und einen andern gegebenen Kreis ausser- oder innerhalb berühre.

Clavius bey s. *Eukl.* 3, 17. 269ste S.

Es sind drey Fälle möglich, je nachdem der Punkt A auf den Umkreis, ausser- oder innerhalb desselben fallen soll.

Auflösung. 1ste Annahme, 7te Aufgabe des 1sten Buchs, und 3te Annahme.

Anmerkung. Es ergiebt sich 1stens, dass man im ersten Falle auf der Linie AD so viele Punkte, als man will, nehmen kann, welche die Mittelpunkte eben so vieler Kreise seyn werden. Alle diese Kreise werden dem Verlangen entsprechen.

2tens dass man, so bald man in den beyden andern Fällen die Linie AB durch den gegebenen Punkt A und den Mittelpunkt des gegebenen Kreises gezogen hat, zween Kreise, die der Aufgabe Genüge thun werden, haben wird. *).

*) *Beweis.* 5. 15.

18te *Aufgabe.* 74*ste *Fig.*

Es sey ein Punkt A *ausserhalb des Kreises* BCD *gegeben. Man solle einen Kreis beschreiben, welcher durch jenen Punkt gehe, und den gegebenen Kreis ausserhalb dergestalt berühre, daß keiner der beyden Kreise innerhalb des andern falle.*

Clavius Eukl. 3, 17. 270ste S.

Auflößung. 1ste Annahme, 7te Aufgabe des 1sten Buchs, und 3te Annahme. *)

19te *Aufgabe.* 74**ste *Fig.*

Es seyen zween Kreise gegeben. Man solle einen dritten Kreis beschreiben, welcher beyde berühre, und dessen Mittelpunkt mit den Mittelpunkten der gegebenen in einer und derselben geraden Linie liege.

Clavius Euklid. 3. 17. 271ste S.

Auflößung. 1ste Annahme, 7te Aufgabe des 1sten Buchs, und 3te Annahme.

Beweis. 5, 15.

1ste *Anmerk.* Es ergiebt sich, daſs, wenn die Kreise ganz ausserhalb oder innerhalb einander fallen, man immer vier Kreise, welche die Frage beantworten, hingegen nur zween Kreise finden kann, wenn die Kreise einander schneiden.

*) *Beweis.* 5, 15.

2te Anmerk. Beſchreibt man aus einem jeden der Mittelpunkte von den zween gegebenen Kreiſen mit einer der Summe des Halbmeſſers jenes Kreiſes und des Halbmeſſers von dem Kreiſe, welchen man als den Berührungs-Kreis annehmen will, gleichen Oefnung Bogen; ſo wird der Punkt, worin dieſe Bogen einander ſchneiden, immer der Mittelpunkt des die beeden gegebenen berührenden Kreiſes ſeyn.

Fünf-

Fünftes Buch.

Ueber die Beschreibung der Figuren in und um den Kreis.

1ste Aufgabe. 75ste Fig.

In einem gegebenen Kreis ABHC *ein Dreyeck* BAC, *welches mit einem gegebenen Dreyecke* DFE *gleiche Winkel habe, zu beschreiben.*

Eukl. 4, 2. — *St.* 123ste S. 1ster S.

Auflößung. Vermittelst der 11ten Aufgabe des 4ten, der 3ten Aufgabe des 2ten Buchs, und der 1sten Annahme.

Beweis. 5, 9.

*2te Aufgabe. 75*ste Fig.*

Um einen gegebenen Kreis MKI *ein Dreyeck, welches mit einem gegebenen Dreyecke* CAB *gleiche Winkel habe, zu beschreiben.*

Eukl. 4, 3. — St. 123ste und 124ste SS. 2ter S.

Auflöſsung. Man verlängere eine Seite CB des Dreyecks (vermöge der 2ten Annahme.) Sodann 1ste Annahme, 4te Aufgabe des 1sten, 3te des 2ten, zweymal, 4te des 1sten Buchs zweymal.

Beweis. Es erhellet aus der Auflöſsung und 6, 2., daſs das Dreyeck GLH um den Kreis beſchrieben ſey. Daſs es mit dem gegebenen Dreyecke gleiche Winkel habe, ergiebt ſich aus 2, 11. 1, 1.

3te Aufgabe. 76ſte Fig.

Ein gleichſeitiges Dreyeck in einen Kreis zu beſchreiben.

Auflöſsung. 1ſte, 3te, und 1ſte Annahme.

Beweis. 1, 8. und 1, 10. 2. *). — Oder noch kürzer: 6, 8. 2. und 6, 8. No. 5.

4te Aufgabe. 77ſte Fig.

In ein gegebenes Dreyeck ABD *einen Kreis zu beſchreiben.*

Eukl. 4, 4. — *St.* 124ſte und 125ſte SS. 3ter S.

Auflöſsung. 1ſte Aufgabe des 2ten, und 5te Aufgabe des 1ſten Buchs.

Beweis. 6, 4. Cor.

5te

*) Sollte man zwiſchen dieſen zween Sätzen nicht noch 1. 7. einzuſchalten haben?

5te *Aufgabe.* 78*ste* Fig.

Um ein gegebenes Dreyeck B A C *einen Kreis zu beschreiben.*

Eukl. 4, 5. — *St.* 125ste und 126ste SS. 4ter S.

Auflößung. 7te und 3te Aufgabe des 1sten Buchs, und 3te Annahme.

Beweis. 5, 2. Cor.

6*te Aufgabe.* 79*ste Fig.*

In einen gegebenen Kreis ein Quadrat zu beschreiben.

Eukl. 4, 6. — *St.* 126ste und 127ste SS. 5ter S.

Auflößung. 1ste Annahme, 3te Aufgabe des 1sten Buchs, und 1ste Annahme.

Beweis. 1, 8. und 5, 5.

7te *Aufgabe.* 80*ste Fig.*

Um einen gegebenen Kreis ein Quadrat zu beschreiben.

Eukl. 4, 7. — *St.* 128ste S. 6ter S.

Auflößung. 1ste Annahme, 3te und 4te Aufgabe des 1sten Buchs.

Beweis. 1, 18. und 19.

8te *Aufgabe.* 81*ste Fig.*

In ein gegebenes Quadrat einen Kreis zu beschreiben.

Eukl. 4, 8.

Auflößung. 7te Aufgabe des 1sten Buchs, 1ste und 3te Annahme.

Beweis. 1, 8. und 6, 2.

9te *Aufgabe.* 82*ste Fig.*

Um ein gegebenes Quadrat einen Kreis zu beschreiben.

Eukl. 4, 9.

Auflößung. 1ste und 3te Annahme.

Beweis. 1, 19. 5. und 6, 1.

10te *Aufgabe.* 83*ste Fig.*

Um ein gegebenes Viereck ABCD, *worin die gegenüberliegenden Winkel* B *und* D, *und* A *und* C *zween rechten Winkeln gleich sind, einen Kreis zu beschreiben.*

Auflößung. Ziehe AC, und sodann vermittelst der 5ten Aufgabe dieses Buchs.

Beweis. 6, 6.

11te *Aufgabe.* 84ste *Fig.*

Ein regelmäßiges Fünfeck in einen gegebenen Kreis zu beschreiben.

Eukl. 4, 11. — St. 128ste und 129ste SS. 7ter S.

1ste Art von Auflößung. Die *Euklids* 10te Aufgabe des 3ten, 1ste des 5ten, 1ste des 2ten Buchs, und 1ste Annahme. — Oder 10te Aufgabe des 3ten, 1ste des 5ten, und 7te des 4ten Buchs.

Beweis. 6, 10.

2te Art von Auflößung Die des *Ptolomäus.* 163ste Fig. Errichte aus C die Lothlinie CD (nach der 3ten Aufgabe des 1sten Buchs). Theile CB in zween gleiche Theile in E (nach der 7ten Aufgabe des 1sten Buchs). Beschreibe mit dem Halbmesser ED aus ED den Bogen DF. Ziehe die Linie DF. Sie ist die Seite des Fünfecks.

Beweis. 6, 14. 3.

12te *Aufgabe.* 85ste *Fig.*

Um den Kreis ein regelmäßiges Fünfeck zu beschreiben.

Eukl. 4, 12. — St. 129ste und 130ste SS. 8ter S.

Auflößung. 11te Aufgabe dieses, und 4te Aufgabe des 1sten Buchs.

Be-

Beweis. 6, 21. *).

13te *Aufgabe.* 86*ste* Fig.

In ein gegebenes Fünfeck, oder überhaupt in ein gegebenes regelmässiges Vieleck einen Kreis zu beschreiben.

Eukl. 4, 13. — *St.* 134ste und 135ste SS. 12ter S.

Auflösung. 1ste Aufgabe des 2ten, 5te des 1sten Buchs, und 3te Annahme.

Beweis. 2, 14. und 6, 2.

14te *Aufgabe.* 87*ste* Fig.

Um ein gegebenes Fünfeck, oder überhaupt um ein gegebenes regelmässiges Vieleck einen Kreis zu beschreiben.

Eukl. 4, 14. — St. 132ste uud 133ste SS. 11ter S.

Auflösung. 1ste Aufgabe des 2ten Buchs, und 3te Annahme.

Beweis. 2, 14. und 6, 1.

15te *Aufgabe.* 88*ste Fig.*

Ein regelmässiges Sechseck in den Kreis zu beschreiben.

Eukl.

*) Vergl. Cor. 1. von eben diesem Lehrsatze.

Eukl. 4, 15. — *St.* 130ste und 131ste SS. 9ter S.

Auflöſung. 3te und 1ste Annahme.

Beweis. 6, 8. 2.

16te Aufgabe.

Zu bestimmen, welche Vielecke man geometrisch in den Kreis beschreiben könne? und wie man sie beschreiben müsse?

Auflösung. Ursprüngliche Figuren, welche man geometrisch in den Kreis beschreiben kann, sind nur das Dreyeck, Quadrat, Fünf- und Sechseck. Man hat hierin bis jetzt weder für das Sieben- noch Neuneck, u. s. w. oder die übrigen Vielecke, deren Seitenanzahl eine Primzahl (erste Zahl) ist, eine geometrische Methode gefunden.

Allein man kann vermittelst der vier oben genannten Vielecke eine Anzahl anderer Vielecke und zwar auf zwey verschiedene Arten beschreiben:

Zuerst vermittelst der 7ten Aufgabe des 4ten Buchs, vermöge einer beständigen Theilung der Bogen in zween gleiche Theile. Auf diese Art beschreibt man vermittelst des Dreyecks Vielecke von 6, 12, 24, 48, u. s. w. Seiten vermittelst des Quadrats Vielecke von 8, 16, 32, u. s. w. Seiten; vermittelst des Fünfecks Vielecke von 10, 20, 40, u. s. w. Seiten;

Zweytens vermittelst der Einschreibung zweyer ursprünglicher Vielecke; denn, wenn AD, AB,

nach

nach der 89sten *Fig.* die Seiten zweyer Vielecke von einer Seitenanzahl g und G sind; so wird der Bogen DB, G—g Seiten eines Vielecks, dessen Seitenanzahl Gxg ist, enthalten. Wenn daher G—g=1, oder Gxg ein Vieleck von G—g, oder wenn G—g=2, oder irgend eine Macht von 2 ist; so wird man das Vieleck von Gxg Seiten beschreiben können. AD sey zum Beyspiel die Seite eines Dreyecks, und AB die Seite eines Fünfecks. In diesem Falle wird der Bogen DB 2 Seiten eines *Fünfzehnecks* enthalten. Die Sehne des halben Bogens BD wird daher die Seite eines Fünfzehnecks seyn. (S. *Eukl.* 4, 16.)

Beweis. 6, 11. Cor. und 6, 12. 1.

Anmerk. Bisweilen können besondere Arten von Auflösungen Statt finden. So giebt es zum Beyspiel für das Zehneck deren zwo.

1ste Art von Auflößung. Die *Euklid's.* 34ste Fig. Man theile den Halbmesser AB nach stetiger Verhältniss-Gleichheit (12te Aufgabe des 1sten Buchs). Mache BC=AD. BC ist die Seite des Zehnecks.

Beweis. 6, 13.

2te Art von Auflösung. Die des *Ptolomäus.* 163ste Fig. Errichte aus C die Lothlinie CD (3te Aufgabe des 1sten Buchs.) Theile CB in zween gleiche Theile in E (7te Aufgabe des 1sten Buchs.) Beschreibe mit dem Halbmesser ED aus E den Bogen DF. FC ist die Seite des Zehnecks.

Be-

Beweis. 6, 14. 3. *)

17*te Aufgabe.*

Zu bestimmen, welche regelmäßige Vielecke um den Kreis beschrieben werden können? und wie man sie um denselben beschreiben müsse.

Auflößung. Man kann alle Vielecke, welche man in den Kreis beschreiben kann, auch um den Kreis beschreiben. Man verfahre nach der 12ten Aufgabe.

Beweis. 6, 21, 2.

18*te Aufgabe.*

Ueber einer gegebenen geraden Linie irgend ein Vieleck zu beschreiben.

Auflößung. 92ste Fig. Zuerst beschreibe man nach Belieben ein dem aufgegebenen ähnliches Vieleck in den Kreis. Hernach beschreibe man über der gegebenen Linie AB ein dem Mittelpunkts-Dreyecke ECF des beschriebenen Vielecks ähnliches Dreyeck ADB. Sodann beschreibe man mit dem Halbmesser DA aus D einen Kreis. In diesem Kreise mache man die Linien BG, GH u. s. w. AB gleich. Diese Linien werden das verlangte Vieleck bilden. **)

1ste

*) Vergl. die 2te Art von Auflösung der 11ten Aufgabe dieses Buchs nebst dem Beweise.

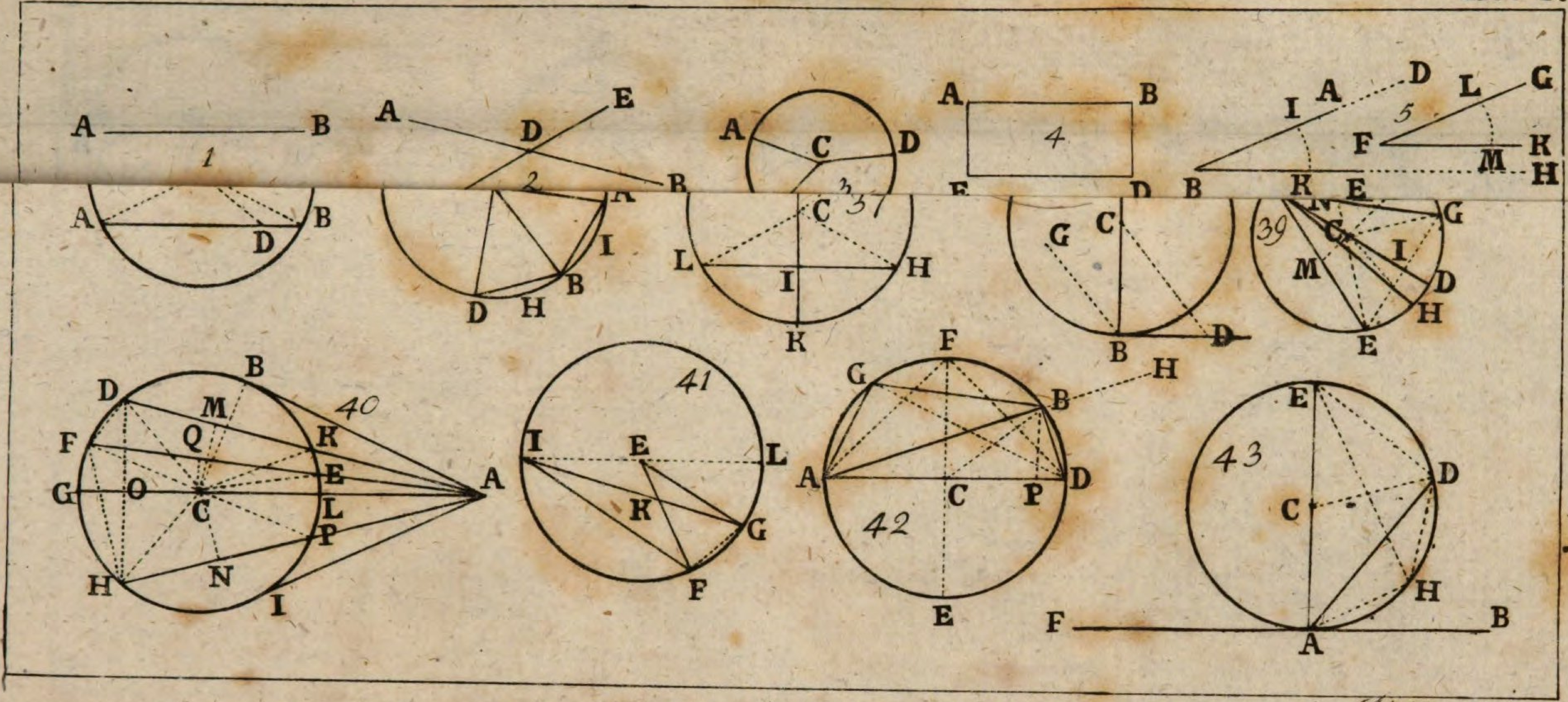
**) Man könnte hier als Beweis hinzufügen: 6, 8, 1.

1ste Anmerk. Hierauf beruht der Gebrauch des Proportional-Zirkels, um diese Aufgabe vermittelst desselben auflösen zu können.

2te Anmerk. Es giebt für einige Vielecke, wie zum Beyspiel für das Dreyeck und Quadrat, kürzere Verfahrungsarten. Siehe die 2te und 4te Aufgabe des 3ten Buchs.

Theoremata

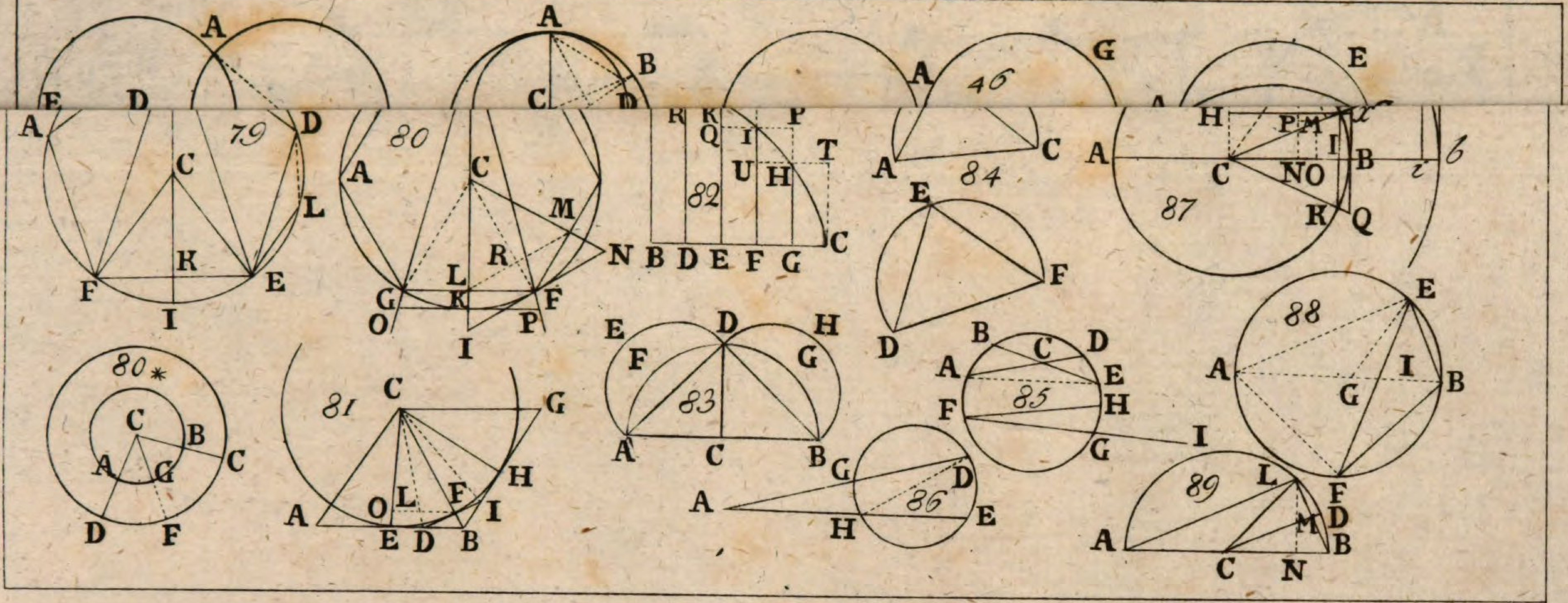
Tab. I.



Müller f.


Theoremata

Tab. II.




Müller sc. w.


Tab. IV



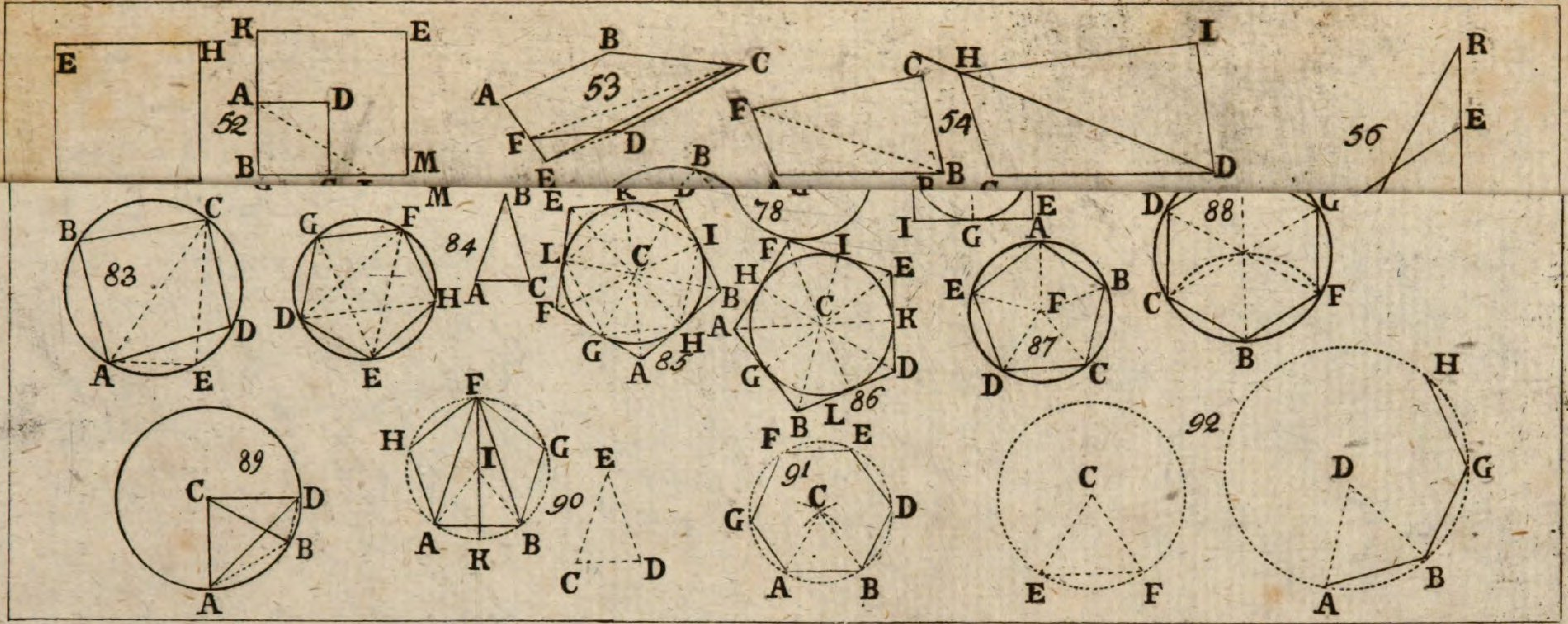


Tab. IV




172
173
174
175
188
190
191
192

Problemata Tab. VII.



Müller sc.

Bayerische StaatsBibliothek
Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Swinden, Jan Hendrik <<van>>,

Anfangsgründe der Messkunde

Jena 1797

Math.p. 554 x
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10082925-9
VD18 11241705-002